Η θεμελιώδης ομάδα ενός συμπλόκου.

Ένα σύμπλοκο K (complex) είναι μία οικογένεια μη κενών, πεπερασμένων υποσυνόλων (των απλόκων (simplices)) ενός συνόλου κορυφών V, τ.ω.

i) εάν $v \in V$, $\{v\}$ είναι άπλοκο του K.

ii) εάν $s \subseteq V$ είναι άπλοκο του K, τότε κάθε μη κενό υποσύνολο του s είναι επίσης άπλοκο του K.

Ένα άπλοκο $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ με $q+1$ κορυφές έχει διάσταση q.
Εάν n είναι η μεγαλύτερη διάσταση ενός απλόκου του K λέμε ότι K έχει διάσταση n.

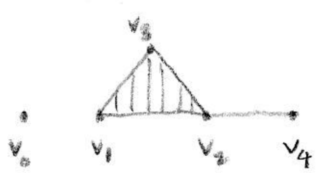
0-σύμπλοκο: σύνολο σημείων. $K = \{v_0, \dots, v_k\}$

1-σύμπλοκο: σύνολο σημείων και γραμμών σημείων.

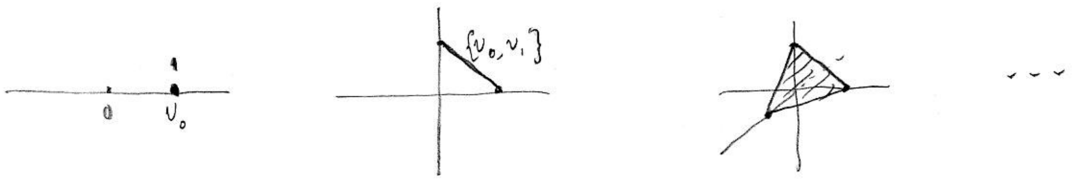
$$L = \{ v_0, \dots, v_4, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\} \}$$

2-σύμπλοκο:

$$M = \{ v_0, \dots, v_4, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\} \\ \{v_1, v_2, v_3\} \}$$



Γεωμετρική εικόνα: το q-απλοκο $\{v_0, \ldots, v_q\}$ παριστάνει την κυρτή θήκη των σημείων $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,\ldots,0,1)$ στον $\mathbb{R}^{q+1}$.



L είναι *υποσύμπλοκο* του συμπλόκου K εάν $V_L \subseteq V_K$ και κάθε απλοκο στο L είναι επίσης απλοκο στο K.

Ενα υποσύμπλοκο είναι *πλήρες* εάν περιέχει κάθε απλοκο του οποίου περιέχει τις κορυφές.

Ο *q-σκελετός* του συμπλόκου K είναι το υποσύμπλοκο K^q που αποτελείται από τα απλοκα του K διάστασης $\leq q$.

Ενα *βήμα* σε ένα σύμπλοκο K είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών (u,v) τέτοιο ώστε $\{u,v\}$ είναι ένα 0- ή 1-απλοκο του K.

Μία *διαδρομή* α, *μήκους* n, *από το* u *στο* v, είναι μία ακολουθία από n διαδοχικά βήματα στο K.

$$\alpha = (u,v_1)(v_1,v_2)\cdots(v_{n-2},v_{n-1})(v_{n-1},v).$$

u είναι η *αρχή* της διαδρομής α, και v το *τέρμα* της α.

Μία διαδρομή είναι *κλειστή* εάν η αρχή και το τέρμα συμπίπτουν.

Ενα σύμπλοκο είναι *συνεκτικό* εάν υπάρχει μία διαδρομή μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κορυφών του.

Κάθε σύμπλοκο είναι η ξένη ένωση των συνεκτικών συνιστωσών του. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με συνεκτικά σύμπλοκα διάστασης 1 ή 2.

Το <u>γινόμενο</u> δύο διαδρομών $\alpha = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ και $\beta = \eta_1 \cdots \eta_m$ ορίζεται όταν το τέρμα της α συμπίπτει με την αρχή της β, ως

$$\alpha\beta = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \eta_1 \cdots \eta_m$$

και είναι διαδρομή μήκους $n+m$ από την αρχή της α στο τέρμα της β.

Ορίζουμε δυο <u>στοιχειώδεις κινήσεις</u> σε διαδρομές:

α) εαν $\{u, v, w\}$ είναι άπλοκο του K, αντικαθιστούμε τα διαδοχικά βήματα $(u,v)(v,w)$ με το βήμα (u,w).

β) εαν $\{u, v, w\}$ είναι άπλοκο του K, αντικαθιστούμε το βήμα (u,w) με τα διαδοχικά βήματα $(u,v)(v,w)$.

<u>Παρ.</u>

$$(u,u)(u,v) \longrightarrow (u,v)$$

$$(u,v)(v,u)(u,w) \longrightarrow (u,u)(u,w) \longrightarrow (u,w)$$

Στο 2-σύμπλοκο M, $(v_1 v_3)(v_3 v_2)(v_2 v_1)$

$$\longrightarrow (v_1 v_2)(v_2 v_1) \longrightarrow (v_1 v_1).$$

Παρατηρούμε ότι οι κινήσεις δεν αλλάζουν την αρχή και το τέρμα μιας διαδρομής.

Στο σύνολο όλων των διαδρομών σε ένα σύμπλοκο K ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από αυτές τις δύο κινήσεις. Δύο διαδρομές είναι <u>ομοτοπικές</u> εάν η μία προκύπτει από την άλλη με μία πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών κινήσεων. Συμβολίζουμε $[\alpha]$ την κλάση ομοτοπίας της α.

<u>Παρ.</u> Στο σύμπλοκο M, $(v_1, v_3)(v_3 v_2)(v_2 v_4) \sim (v_1, v_2)(v_2, v_4)$

Στο σύμπλοκο L, $(v_1, v_2)(v_2, v_4)(v_4\ v_3) \not\sim (v_1, v_2)(v_2 v_3)$.

Ομοτοπικές διαδρομές έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο τέρμα, και ο πολλαπλασιασμός διαδρομών είναι καλά ορισμένος στο σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας διαδρομών στο K,

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta].$$

Για κάθε κορυφή v του K, ορίζεται η <u>τετριμμένη διαδρομή</u> στο v, (v, v). Για κάθε διαδρομή $\alpha = (v_0 v_1) \cdots (v_{n-1} v_n)$ ορίζεται η <u>αντίστροφη</u> διαδρομή $\alpha^{-1} = (v_n v_{n-1}) \cdots (v_1 v_0)$.

<u>Λήμμα</u> α) Εαν $u = $ αρχή(α), $v = $ τέρμα(α), τότε

$$[(u,u)][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][(v,v)].$$

$$[\alpha][\alpha^{-1}] = [(u,u)], \quad [\alpha^{-1}][\alpha] = [(v,v)]$$

β) Εαν ένα από τα $([\alpha][\beta])[\gamma]$ ή $[\alpha]([\beta][\gamma])$ ορίζεται, τότε ορίζεται και το άλλο, και είναι ίσα.

<u>Ορισμός</u> K σύμπλοκο, v επιλεγμένη κορυφή του K.

Η <u>θεμελιώδης ομάδα</u> του συμπλόκου K με βάση v είναι

$$\pi(K,v) = \{ [\alpha] : \alpha \text{ κλειστή διαδρομή στο } v \}.$$

<u>Θεώρημα</u> $\pi(K,v)$ είναι ομάδα, με ταυτοτικό στοιχείο την κλάση της τετριμμένης διαδρομής στο v.

<u>Απ</u> Για κλειστές διαδρομές, η πράξη ορίζεται πάντα. Από το Λήμμα, είναι προσεταιριστική, έχει ταυτοτικό στοιχείο και αντίστροφο. //

<u>Θεώρημα</u> Εάν K είναι συνεκτικό και v, v' είναι κορυφές του K, τότε $\pi(K,v) \cong \pi(K,v')$.

<u>Απ</u>. Έστω γ διαδρομή στο K από το v στο v'. Ορίζουμε

$$\gamma_{\#} : \pi(K,v) \longrightarrow \pi(K,v') \quad \text{με}$$

$$\gamma_{\#}([\alpha]) = [\gamma^{-1} \alpha \gamma] \in \pi(K,v'),$$

και ελέγχουμε ότι $\gamma_{\#}$ είναι ισομορφισμός, με αντίστροφο $[\beta] \mapsto [\gamma \beta \gamma^{-1}]$.

//

Ένας <u>μορφισμός συμπλόκων</u> (simplicial map) $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μια απεικόνιση $\varphi : V_K \longrightarrow V_L$ τ.ω. $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_q)\}$ είναι άπλοκο του L όταν $\{v_1, \dots, v_q\}$ είναι άπλοκο του K.

<u>Θεώρημα</u> Εάν $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μορφισμός συμπλόκων, τότε $\varphi_* : \pi(K, v) \longrightarrow \pi(L, \varphi(v)) : [\alpha] \longmapsto [\varphi\alpha]$ είναι ομομορφισμός. Επίσης, $(id_K)_* = id_{\pi_1(K,v)}$ και $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

<u>Απ.</u> Εάν $\alpha = (v_1 v_2) \dots (v_{n-1} v_n)$ είναι διαδρομή στο K, ορίζουμε τη διαδρομή

$$\varphi(\alpha) = (\varphi(v_1)\ \varphi(v_2)) \dots (\varphi(v_{n-1})\ \varphi(v_n))$$ στο L, και

ελέγχουμε ότι εάν $\alpha \sim \beta$ στο K, τότε $\varphi(\alpha) \sim \varphi(\beta)$ στο L. //

Μία διαδρομή είναι <u>ανηγμένη</u> εάν δεν περιέχει τετριμμένα βήματα (v,v) ή διαδοχικά αντίστροφα βήματα $(v,u)(u,v)$. Μία ανηγμένη κλειστή διαδρομή ονομάζεται <u>κόμπος</u>.

Με ομοτοπία μπορούμε να αφαιρέσουμε τετριμμένα βήματα

$$(u,v)(v,v)(v,w) \sim (u,v)(v,w)$$

ή διαδοχικά αντίστροφα βήματα

$$(w,v)(v,u)(u,v)(v,z) \sim (w,v)(v,z).$$

και αφού το μήκος της διαδρομής μειώνεται, αυτή η διαδικασία σταματάει με μία ανηγμένη διαδρομή.

<u>Λήμμα</u> Κάθε κλειστή διαδρομή είναι ομοτοπική προς ένα κόμπο ή μία τετριμμένη διαδρομή. //