ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

S_n είναι η ομάδα μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Άσκηση 1.1 Δείξτε οτι εάν $\alpha \in S_n$ και $\alpha^2 = 1$, τότε $\alpha = 1$ ή α είναι εναλλαγή ή α είναι γινόμενο ξένων εναλλαγών.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Από το θεώρημα παραγοντοποίησης, α είναι γινόμενο ξένων κύκλων. Εάν κάποιος από αυτούς τους κύκλους έχει μηκος μεγαλύτερο από 2, τότε $\alpha^2 \neq 1$. Άρα α είναι 1-κύκλος, 2-κύκλος ή γινόμενο ξένων 2-κύκλων.

Άσκηση 1.2 Δείξτε οτι ένας κύκλος μήκους r είναι άρτια μετάθεση εάν r είναι περιττός αριθμός.

Άσκηση 1.3 S_X είναι η ομάδα μεταθέσεων του συνόλου S. Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δείξτε οτι $f_\# : S_x \longrightarrow S_Y : \sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$ είναι ισομορφισμός.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$f_\#$ είναι ομομορφισμός:

$$f_\#(\sigma \circ \tau) = f \circ \sigma \circ \tau \circ f^{-1} = f \circ \sigma \circ f^{-1} \circ f \circ \tau \circ f^{-1} = f_\#(\sigma) \circ f_\#(\tau) .$$

$f_\#$ είναι επιμορφισμός: Εάν $\psi \in S_Y$, $f^{-1} \circ \psi \circ f \in S_X$, και $f_\#(f^{-1} \circ \psi \circ f) = \psi$.
$f_\#$ είναι μονομορφισμός: Εάν $f_\#(\sigma) = \mathrm{id}_Y$, $\sigma = f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y \circ f = \mathrm{id}_X$.

Άσκηση 1.4 Εάν G είναι ομάδα, X είναι σύνολο και $f : G \longrightarrow X$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δείξτε οτι υπάρχει μοναδική πράξη $\mu : X \times X \longrightarrow X$ τέτοια ώστε X με την πράξη μ να είναι ομάδα και f να είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 1.5 Θεωρήστε τον μοναδιαίο κύκλο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Δείξτε οτι S^1 είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών.
Δείξτε οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 : x \longmapsto e^{\mathrm{i}\lambda x}$ είναι ομομορφισμός.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $z, w \in S^1$, τότε $|zw| = 1$ και $|1/z| = 1$. Άρα S^1 είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
$f_\lambda(x + x') = e^{\mathrm{i}\lambda(x+x')} = f_\lambda(x) f_\lambda(x')$, άρα f_λ είναι ομομορφισμός.

Άσκηση 1.6 Θεωρήστε την ομάδα $C_n = \{e^{2k\pi\mathrm{i}/n} \in S^1 : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Δείξτε οτι $C_n \cong \mathbb{Z}_n$.

Άσκηση 1.7 Εάν Y είναι μη κενό υποσύνολο του X, δείξτε οτι S_Y είναι ισομορφική με μία υποομάδα της S_X.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για $\sigma \in S_Y$ ορίζουμε $\bar{\sigma} \in S_X$ με $\bar{\sigma}(x) = \sigma(x)$ εάν $x \in Y$ και $\bar{\sigma}(x) = x$ εάν $x \in X \setminus Y$. Ελέγχουμε οτι $\sigma \longmapsto \bar{\sigma}$ είναι μονομορφισμός. Άρα S_Y είναι ισομορφικό με την εικόνα του.

Άσκηση 1.8 Δείξτε οτι εάν G είναι πεπερασμένη και $K \leq H \leq G$, τότε

$$[G : K] = [G : H]\,[H : K]\,.$$

Άσκηση 1.9 Εάν $a \in G$ έχει πεπερασμένη τάξη και $f : G \longrightarrow H$ είναι ομομορφισμός, τότε η τάξη του $f(a)$ διαιρεί την τάξη του a.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Υποθέτουμε οτι a έχει τάξη k. Τότε $f(a)^k = f(a^k) = 1$. Υποθέτουμε οτι $f(a)$ έχει τάξη $n < k$. Τότε υπάρχουν p και q τέτοιοι ώστε $k = pn + q$ και $0 \leq q < n$. Αλλά τότε $f(a)^q = f(a)^{k-pn} = 1$. Αφού n είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος για τον οποίο $f(a)^n = 1$, συμπεραίνουμε οτι $q = 0$, και n διαιρεί το k.

Άσκηση 1.10 Δείξτε οτι εάν $K \leq G$ και $[G : K] = 2$, τότε $K \lhd G$.

Άσκηση 1.11 Η ομάδα των τετρανίων Q είναι η ομάδα που παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε οτι Q έχει 8 στοιχεία, δεν είναι αβελιανή, αλλά οτι κάθε υποομάδα της Q είναι κανονική.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θέτουμε $a = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε όλα τα στοιχεία της Q είναι τα a, b, ab, $-1 = a^2 = b^2 = (ab)^2$, $-a$, $-b$, $-ab = ba$, $1 = a^4 = b^4 = (ab)^4$.
Οι μόνες γνήσιες υποομάδες της Q είναι οι $\langle 1\rangle$, $\langle -1\rangle$, $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ και $\langle ab\rangle$. Αυτές είναι κανονικές, για παράδειγμα, $aba^{-1} = -aba = baa = -b$.

Άσκηση 1.12 Για κάθε ομάδα G δείξτε οτι η παράγωγος υποομάδα G' είναι το σύνολο $\{a_1a_2\ldots a_na_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_n^{-1} : a_i \in G, n \geq 2\}$.
Υπόδειξη: $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = a(ba^{-1})b^{-1}c(dc^{-1})d^{-1}a^{-1}(ab^{-1})bc^{-1}(cd^{-1})d$.

Άσκηση 1.13 Θεωρήστε $K \lhd G$ και $f : G \longrightarrow H$ ομομορφισμό με $K \leq \ker f$. Δείξτε οτι ορίζεται ομομορφισμός $f_* : G/K \longrightarrow H$ με $f_*(Ka) = f(a)$, δηλαδή οτι ο f παραγοντοποιείται μέσω του κανονικού ομομορφισμού $\nu : G \longrightarrow G/K$, $f = f_* \circ \nu$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ελέγχουμε οτι $Ka \longmapsto f(a)$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση: Εάν $Kb = Ka$, τότε $ab^{-1} \in$

$K \subseteq \ker f$, άρα $f(a) = f(b)$.
Αυτή η άπεικόνιση είναι ομομορφισμός: $(Ka)(Kb) = Kab$, άρα $f_*((Ka)(Kb)) = f(ab) = f(a)f(b) = f_*(Ka)f_*(Kb)$.