ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

S_n είναι η ομάδα μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Άσκηση 1.1 Δείξτε οτι εάν $\alpha \in S_n$ και $\alpha^2 = 1$, τότε $\alpha = 1$ ή α είναι εναλλαγή ή α είναι γινόμενο ξένων εναλλαγών.

Άσκηση 1.2 Δείξτε οτι ένας κύκλος μήκους r είναι άρτια μετάθεση εάν r είναι περιττός αριθμός.

Άσκηση 1.3 S_X είναι η ομάδα μεταθέσεων του συνόλου S. Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δείξτε οτι $f_{\#} : S_x \longrightarrow S_Y : \sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 1.4 Εάν G είναι ομάδα, X είναι σύνολο και $f : G \longrightarrow X$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δείξτε οτι υπάρχει μοναδική πράξη $\mu : X \times X \longrightarrow X$ τέτοια ώστε X με την πράξη μ να είναι ομάδα και f να είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 1.5 Θεωρήστε τον μοναδιαίο κύκλο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Δείξτε οτι S^1 είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών.
Δείξτε οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 : x \longmapsto e^{\mathrm{i}\lambda x}$ είναι ομομορφισμός.

Άσκηση 1.6 Θεωρήστε την ομάδα $C_n = \{e^{2k\pi\mathrm{i}/n} \in S^1 : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Δείξτε οτι $C_n \cong \mathbb{Z}_n$.

Άσκηση 1.7 Εάν Y είναι μη κενό υποσύνολο του X, δείξτε οτι S_Y είναι ισομορφική με μία υποομάδα της S_X.

Άσκηση 1.8 Δείξτε οτι εάν G είναι πεπερασμένη και $K \leq H \leq G$, τότε

$$[G : K] = [G : H]\,[H : K]\,.$$

Άσκηση 1.9 Εάν $a \in G$ έχει πεπερασμένη τάξη και $f : G \longrightarrow H$ είναι ομομορφισμός, τότε η τάξη του $f(a)$ διαιρεί την τάξη του a.

Άσκηση 1.10 Δείξτε οτι εάν $K \leq G$ και $[G : K] = 2$, τότε $K \triangleleft G$.

Άσκηση 1.11 Η ομάδα των τετρανίων Q είναι η ομάδα που παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε οτι Q έχει 8 στοιχεία, δεν είναι αβελιανή, αλλά οτι κάθε υποομάδα της Q είναι κανονική.

Άσκηση 1.12 Για κάθε ομάδα G δείξτε οτι η παράγωγος υποομάδα G' είναι το σύνολο $\{a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1} : a_i \in G, n \geq 2\}$.
Υπόδειξη: $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = a(ba^{-1})b^{-1}c(dc^{-1})d^{-1}a^{-1}(ab^{-1})bc^{-1}(cd^{-1})d$.

Άσκηση 1.13 Θεωρήστε $K \triangleleft G$ και $f : G \longrightarrow H$ ομομορφισμό με $K \leq \ker f$. Δείξτε οτι ορίζεται ομομορφισμός $f_* : G/K \longrightarrow H$ με $f_*(Ka) = f(a)$, δηλαδή οτι ο f παραγοντοποιείται μέσω του κανονικού ομομορφισμού $\nu : G \longrightarrow G/K$, $f = f_* \circ \nu$.