ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Άσκηση 2.1 Δείξτε οτι $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Άσκηση 2.2 Δείξτε οτι $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Άσκηση 2.3 Θεωρήστε ομάδα G με κανονικές υποομάδες H και K. Δείξτε οτι $HK = G$ και $H \cap K = 1$ εάν και μόνον εάν για κάθε $a \in G$ υπάρχουν μοναδικά $h \in H$ και $k \in K$ τέτοια ώστε $a = hk$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\Rightarrow$: Αφού $HK = G$, για κάθε $a \in G$ υπάρχουν $h \in H$ και $k \in K$ τέτοια ώστε $a = hk$. Εάν επίσης $a = h'k'$, τότε $h^{-1}h' = kk'^{-1}$, αλλά $h^{-1}h' \in H$, $kk'^{-1} \in K$, άρα $h^{-1}h' = 1 = kk'^{-1}$, και συνεπώς $h' = h$, $k' = k$.
$\Leftarrow$: Αφού για κάθε $a \in G$ υπάρχουν $h \in H$, $k \in K$ τέτοια ώστε $a = hk$, έπεται οτι $G = HK$. Εάν $g \in H \cap K$, τότε $a = (hg)(g^{-1}k)$. Αλλά αφού τα h, k είναι μοναδικά, $g = 1$.

Άσκηση 2.4 Εάν G είναι ομάδα, X είναι σύνολο και $f : G \longrightarrow X$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δείξτε οτι υπάρχει μοναδική πράξη $\mu : X \times X \longrightarrow X$ τέτοια ώστε X με την πράξη μ να είναι ομάδα και f να είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 2.5 Θεωρήστε ομάδες H, K, L. Δείξτε οτι $H \times K \cong K \times H$ και $H \times (K \times L) \cong (H \times K) \times L$.

Άσκηση 2.6 Δείξτε οτι εάν n είναι περιττός αριθμός, $D_{4n} \cong D_{2n} \times \mathbb{Z}_2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε τις παραστάσεις ομάδων $D_{2n} = \langle s, t \,|\, s^n = t^2 = stst = 1\rangle$, $\mathbb{Z}_2 = \langle r \,|\, r^2 = 1\rangle$ και $D_{4n} = \langle p, q \,|\, p^{2n} = q^2 = pqpq = 1\rangle$.
Διευκολύνει να θεωρήσουμε τις διεδρικές ομάδες να δρουν στο μοναδιαίο κύκλο. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τις απεικονίσεις $S^1 \longrightarrow S^1$, $S(z) = ze^{2\pi i/n}$, $T(z) = \bar{z}$, $R(z) = -z$, $P(z) = ze^{\pi i/n}$ και $Q(z) = \bar{z}$.
Τότε $D_{2n} \cong \langle S, T\rangle$, $\mathbb{Z}_2 \cong \langle R\rangle$ και $D_{4n} \cong \langle P, Q\rangle$.
Οι απεικονίσεις S και T μετατίθενται με την R, και συνεπώς $\langle S, T, R\rangle \cong \langle S, T\rangle \times \langle R\rangle$.
Παρατηρούμε οτι $S = P^2$, $T = Q$ και $R = P^n$, ενώ $P = RS^{(n+1)/2}$. Άρα $\langle S, T\rangle \times \langle R\rangle = \langle P, Q\rangle$.

Άσκηση 2.7 Δείξτε οτι $Z_3 \times V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

Άσκηση 2.8 Δείξτε οτι εάν α είναι n-κύκλος στην S_n, τότε η κεντροποιούσα του α είναι η $\langle\alpha\rangle$.

Άσκηση 2.9 Δείξτε οτι $Z(G_1 \times \cdots \times G_n) \cong Z(G_1) \times \cdots \times Z(G_n)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε $(a, b) \in Z(G_1 \times G_2)$. Τότε για κάθε $(g, h) \in G_1 \times G_2$, $(a, b)(g, h) = (g, h)(a, b)$. Ειδικότερα, για κάθε $g \in G_1$, $(ag, b) = (ga, b)$. Άρα $a \in Z(G_1)$. Παρόμοια, $b \in Z(G_2)$. Άρα $Z(G_1 \times G_2) \subseteq Z(G_1) \times Z(G_2)$.
Αντίστροφα, εάν $a \in Z(G_1)$ και $b \in Z(G_2)$, τότε για κάθε $(g, h) \in G_1 \times G_2$, $(a, b)(g, h) = (g, h)(a, b)$. Άρα $Z(G_1) \times Z(G_2) \subseteq Z(G_1 \times G_2)$.

Άσκηση 2.10 Δείξτε οτι εάν $H \leq G$ και $a \in G$, τότε $N_G(aHa^{-1}) = aN_G(H)a^{-1}$.

Άσκηση 2.11 Δείξτε οτι εάν $H \leq K \leq G$, τότε $N_K(H) = N_G(H) \cap K$.

Άσκηση 2.12 Θεωρήστε ομάδα G που δρά στο σύνολο X. Εάν $x, y \in X$ και $y = gx$ για κάποιο $g \in G$, δείξτε οτι $G_y = gG_xg^{-1}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε $h \in G_x$. Τότε $hx = x$ και $(ghg^{-1})y = (gh)x = g(hx) = y$. Άρα $gG_xg^{-1} \subseteq G_y$. Αντίστροφα, εάν $k \in G_y$, τότε $(g^{-1}kg)x = g^{-1}y = x$, άρα $g^{-1}kg \in G_x$ και $G_y \subseteq gG_xg^{-1}$.

Άσκηση 2.13 Εάν $H \leq G$, δείξτε οτι G δρα μεταβατικά στο σύνολο $G/H = \{gH : g \in G\}$, και στο σύνολο $\{gHg^{-1} : g \in G\}$.

Η άπειρη διεδρική ομάδα D_∞ παράγεται από τις πραγματικές συναρτήσεις $a : x \longmapsto -x$ και $b : x \longmapsto 2 - x$.

Άσκηση 2.14 Θεωρήστε τους ενδομορφισμούς $i_1 : \langle a\rangle \hookrightarrow D_\infty$ και $i_2 : \langle b\rangle \hookrightarrow D_\infty$. Δείξτε οτι εάν $f_1 : \langle a\rangle \longrightarrow G$ και $f_2 : \langle b\rangle \longrightarrow G$ είναι ομομορφισμοί, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : D_\infty \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $\varphi \circ i_k = f_k$, $k = 1, 2$.
(Δηλαδή δείξτε οτι D_∞ είναι το "άθροισμα" (= ελεύθερο γινόμενο) ομάδων $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.)

Άσκηση 2.15 Θεωρήστε την υποομάδα $H = \langle a, babab\rangle \leq D_\infty$. Δείξτε οτι $H \cong D_\infty$ και $[D_\infty : H] = 3$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δείτε την Πρόταση 2.2 στον Meier.
Ένας άλλος τρόπος να δείξετε οτι $H \cong D_\infty$ είναι να δείξετε οτι η H είναι συζυγής της D_∞ μέσω της απεικόνισης $g : x \longmapsto 3x$.

Άσκηση 2.16 Δείξτε οτι εάν $Z(G) = 1$, τότε η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της G,

$$\mathrm{Inn}\,(G) = \{\gamma_a : g \longmapsto aga^{-1} : a \in G\} \leq \mathrm{Aut}\,(G)\,,$$

είναι ισομορφική με την G.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δείξτε οτι η απεικόνιση $a \longmapsto \gamma_a$ είναι ομομορφισμός, και οτι ο πυρήνας του είναι η $Z(G)$.

Άσκηση 2.17 Δείξτε οτι $Z(D_\infty) = 1$. Συμπεράνετε οτι $D_\infty \cong \mathrm{Inn}\,(D_\infty)$.

Άσκηση 2.18 Δείξτε οτι $[\mathrm{Aut}\,(D_\infty) : \mathrm{Inn}\,(D_\infty)] = 2$.
(Θεωρήστε τον αυτομορφισμό φ με $\varphi(a) = b$ και $\varphi(b) = a$.)

Άσκηση 2.19 Δείξτε οτι $D_\infty \cong \mathrm{Aut}\,(D_\infty)$.