ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Άσκηση 2.1 Δείξτε οτι $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Άσκηση 2.2 Δείξτε οτι $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Άσκηση 2.3 Θεωρήστε ομάδα G με κανονικές υποομάδες H και K. Δείξτε οτι $HK = G$ και $H \cap K = 1$ εάν και μόνον εάν για κάθε $a \in G$ υπάρχουν μοναδικά $h \in H$ και $k \in K$ τέτοια ώστε $a = hk$.

Άσκηση 2.4 Εάν G είναι ομάδα, X είναι σύνολο και $f : G \longrightarrow X$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δείξτε οτι υπάρχει μοναδική πράξη $\mu : X \times X \longrightarrow X$ τέτοια ώστε X με την πράξη μ να είναι ομάδα και f να είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 2.5 Θεωρήστε ομάδες H, K, L. Δείξτε οτι $H \times K \cong K \times H$ και $H \times (K \times L) \cong (H \times K) \times L$.

Άσκηση 2.6 Δείξτε οτι εάν n είναι περιττός αριθμός, $D_{4n} \cong D_{2n} \times \mathbb{Z}_2$.

Άσκηση 2.7 Δείξτε οτι $Z_3 \times V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

Άσκηση 2.8 Δείξτε οτι εάν α είναι n-κύκλος στην S_n, τότε η κεντροποιούσα του α είναι η $\langle \alpha \rangle$.

Άσκηση 2.9 Δείξτε οτι $Z(G_1 \times \cdots \times G_n) \cong Z(G_1) \times \cdots \times Z(G_n)$.

Άσκηση 2.10 Δείξτε οτι εάν $H \leq G$ και $a \in G$, τότε $N_G(aHa^{-1}) = aN_G(H)a^{-1}$.

Άσκηση 2.11 Δείξτε οτι εάν $H \leq K \leq G$, τότε $N_K(H) = N_G(H) \cap K$.

Άσκηση 2.12 Θεωρήστε ομάδα G που δρά στο σύνολο X. Εάν $x, y \in X$ και $y = gx$ για κάποιο $g \in G$, δείξτε οτι $G_y = gG_xg^{-1}$.

Άσκηση 2.13 Θεωρήστε $K \lhd G$ και $f : G \longrightarrow H$ ομομορφισμό με $K \leq \ker f$. Δείξτε οτι ορίζεται ομομορφισμός $f_* : G/K \longrightarrow H$ με $f_*(Ka) = f(a)$, δηλαδή οτι ο f παραγοντοποιείται μέσω του κανονικού ομομορφισμού $\nu : G \longrightarrow G/K$, $f = f_* \circ \nu$.

Άσκηση 2.14 Εάν $H \leq G$, δείξτε οτι G δρα μεταβατικά στο σύνολο $G/H = \{gH : g \in G\}$, και στο σύνολο $\{gHg^{-1} : g \in G\}$.

Η άπειρη διεδρική ομάδα D_∞ παράγεται από τις απεικονίσεις $a : x \longmapsto -x$ και $b : x \longmapsto 2 - x$.

Άσκηση 2.15 Θεωρήστε τους ενδομορφισμούς $i_1 : \langle a \rangle \hookrightarrow D_\infty$ και $i_2 : \langle b \rangle \hookrightarrow D_\infty$. Δείξτε οτι εάν $f_1 : \langle a \rangle \longrightarrow G$ και $f_2 : \langle b \rangle \longrightarrow G$ είναι ομομορφισμοί, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : D_\infty \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $\varphi \circ i_k = f_k$, $k = 1, 2$.
(Δηλαδή δείξτε οτι D_∞ είναι το ''άθροισμα'' (= ελεύθερο γινόμενο) ομάδων $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.)

Άσκηση 2.16 Θεωρήστε την υποομάδα $H = \langle a, babab \rangle \leq D_\infty$. Δείξτε οτι $H \cong D_\infty$ και $[D_\infty : H] = 3$.

Άσκηση 2.17 Δείξτε οτι εάν $Z(G) = 1$, τότε η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της G,

$$\mathrm{Inn}\,(G) = \{\gamma_a : g \longmapsto aga^{-1} : a \in G\} \leq \mathrm{Aut}\,(G)\,,$$

είναι ισομορφική με την G.

Άσκηση 2.18 Δείξτε οτι $Z(D_\infty) = 1$. Συμπεράνετε οτι $D_\infty \cong \mathrm{Inn}\,(D_\infty)$.

Άσκηση 2.19 Δείξτε οτι $[\mathrm{Aut}\,(D_\infty) : \mathrm{Inn}\,(D_\infty)] = 2$.
(Θεωρήστε τον αυτομορφισμό φ με $\varphi(a) = b$ και $\varphi(b) = a$.)

Άσκηση 2.20 Δείξτε οτι $D\infty \cong \mathrm{Aut}\,(D_\infty)$.