ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

Άσκηση 3.1 Δείξτε οτι οι ομάδες με παράσταση

$$(a,\, b \,|\, a^4,\, a^2b^2,\, abab^{-1}) \qquad \text{και} \qquad (x,\, y \,|\, xyxy^{-1},\, x^2y^{-2}) \,,$$

έχουν οκτώ στοιχεία, και είναι ισόμορφες με την ομάδα των τετρανίων (Άσκηση 1.11).

Απάντηση - Υπόδειξη.
Απαριθμούμε τα διαφορετικά στοιχεία της ομάδας ως προς το μήκος και κατόπιν λεξικογραφικά.
Μήκος 0: 1
Μήκος 1: a, b, a^{-1}, b^{-1}
Μήκος 2: a^2, ab, $aa^{-1} = 1$, ab^{-1},
$ba = ab^{-1}$, $b^2 = a^2$, $ba^{-1} = ab$, $b^{-2} = a^2$,
$a^{-1}a = 1$, $a^{-1}b = ba$, $a^{-2} = a^2$, $a^{-1}b^{-1} = ab$,
$b^{-1}a = ab$, $b^{-1}b = 1$, $b^{-1}a^{-1} = ba$, $b^{-2} = a^2$.
Συνεχίζοντας με τις 4^3 λέξεις μήκους 3, βλέπουμε οτι δεν προκύπτει κανένα στοιχείο διαφορετικό από τα προηγούμενα. Ενδεικτικά:
Μήκος 3: $a^3 = a^{-1}$, $a^2b = b^{-1}$, $a^2b^{-1} = b$
$aba = b$, $ab^2 = a^{-1}$, $aba^{-1} = b^{-1}$,
$ab^{-1}a = b^{-1}$, $ab^{-1}a^{-1} = b$, $ab^{-2} = a^{-1}$, ...
Συμπεραίνουμε οτι κάθε λέξη μήκους ≥ 3 ανάγεται σε συντομότερη λέξη. Άρα τα στοιχεία της ομάδας με παράσταση $(a,\, b \,|\, a^4,\, a^2b^2,\, abab^{-1})$ είναι

$$\{1,\, a,\, b,\, a^{-1},\, b^{-1},\, a^2,\, ab,\, ba\} \,.$$

Για τη δεύτερη παράσταση, εάν αντιστοιχίσουμε τα a, b στα x, y, οι σχέσεις $xyxy^{-1}$, x^2y^{-2} είναι συνέπεια των σχέσεων a^4, a^2b^2, $abab^{-1}$. Για το αντίστροφο αρκεί να δείξουμε οτι $x^4 = 1$. Πράγματι, από τη σχέση $x^2y^{-2} = 1$ έχουμε $x^2 = y^2$, ενώ από την $xyxy^{-1} = 1$ έχουμε $xy = yx^{-1}$ και $yx = x^{-1}y$. Άρα $x^4 = xyyx = yx^{-1}x^{-1}y = yx^{-2}y = yy^{-2}y = 1$.

Άσκηση 3.2 Δείξτε οτι κάθε στοιχείο μίας ελεύθερης ομάδας F έχει άπειρη τάξη: $a^n \neq 1$ για κάθε $a \in F$ με $a \neq 1$ και κάθε $n \neq 0$.

Άσκηση 3.3 Δείξτε οτι εάν F είναι ελεύθερη και $\operatorname{rank} F \geq 2$, τότε $Z(G) = 1$.

Άσκηση 3.4 Θεωρήστε $Y \subseteq X$, F ελεύθερη στο X και N την κανονική υποομάδα της F που παράγεται από το Y. Δείξτε οτι F/N είναι ελεύθερη στο σύνολο $X \setminus Y$.
(Πιο συγκεκριμένα, F/N έχει βάση $\{zN : z \in X \setminus Y\}$.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
Πρέπει να δείξετε οτι για κάθε ομάδα G και κάθε απεικόνιση $f : X \setminus Y \longrightarrow G$ υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : F/N \longrightarrow G$ που επεκτείνει την f.

Αρχικά μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε απεικόνιση $\tilde{f} : X \longrightarrow G$. Αφού F είναι ελεύθερη στο X, θα υπάρχει ομομορφισμός $\tilde{\varphi} : F \longrightarrow G$ που επεκτείνει την $\tilde{f}$. Για να μπορεί αυτός ο ομομορφισμός να δώσει ομομορφισμό από το πηλίκο F/N, πρέπει ο πυρήνας του να περιέχει την N. Για να το πετύχουμε αυτό ορίζουμε $\tilde{f}(y) = 1 \in G$ για κάθε $y \in Y$.

Δείξτε οτι τότε $N \in \ker \tilde{\varphi}$ και οτι $\varphi(zN) = \tilde{\varphi}(z)$ είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός που επεκτείνει την f.

Άσκηση 3.5 Δείξτε οτι εάν F είναι ελεύθερη και $\operatorname{rank} F \geq 2$, τότε υπάρχει αυτομορφισμός $\varphi : F \longrightarrow F$ με $\varphi(\varphi(w)) = w$ για κάθε $w \in F$, ο οποίος δεν έχει σταθερά σημεία, δηλαδή $\varphi(w) = w$ συνεπάγεται $w = 1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρήστε την απεικόνιση που αντιστρέφει τα πρόσημα των εκθετών σε κάθε λέξη, $\varphi : x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \longmapsto x_1^{-\varepsilon_1} \cdots x_n^{-\varepsilon_n}$. Δείξτε οτι είναι ομομορφισμός, και οτι $\varphi^2 = \mathrm{id}$.