ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

Άσκηση 3.1 Δείξτε οτι οι ομάδες με παράσταση

$$(a,\, b \,|\, a^4,\, a^2b^2,\, abab^{-1}) \qquad \text{και} \qquad (x,\, y \,|\, xyxy^{-1},\, x^2y^{-2})\,,$$

έχουν οκτώ στοιχεία, και είναι ισόμορφες με την ομάδα των τετρανίων (Άσκηση 1.11).

Άσκηση 3.2 Δείξτε οτι κάθε στοιχείο μίας ελεύθερης ομάδας F έχει άπειρη τάξη: $a^n \neq 1$ για κάθε $a \in F$ με $a \neq 1$ και κάθε $n \neq 0$.

Άσκηση 3.3 Δείξτε οτι εάν F είναι ελεύθερη και $\operatorname{rank} F \geq 2$, τότε $Z(G) = 1$.

Άσκηση 3.4 Θεωρήστε $Y \subseteq X$, F ελεύθερη στο X και N την κανονική υποομάδα της F που παράγεται από το Y. Δείξτε οτι F/N είναι ελεύθερη στο σύνολο $X \setminus Y$.
(Πιο συγκεκριμένα, F/N έχει βάση $\{zN : z \in X \setminus Y\}$.)

Άσκηση 3.5 Δείξτε οτι εάν F είναι ελεύθερη και $\operatorname{rank} F \geq 2$, τότε υπάρχει αυτομορφισμός $\varphi : F \longrightarrow F$ με $\varphi(\varphi(w)) = w$ για κάθε $w \in F$, ο οποίος δεν έχει σταθερά σημεία, δηλαδή $\varphi(w) = w$ συνεπάγεται $w = 1$.