ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Άσκηση 4.1 Δείξτε οτι ένα σύμπλοκο K είναι συνεκτικό εάν και μόνον εάν ο 1-σκελετός του, K^1, είναι συνεκτικός.

Άσκηση 4.2 Δείξτε οτι εάν s είναι ένα άπλοκο στο K, το πλήρες υποσύμπλοκο του K που αποτελείται από όλα τα μη κενά υποσύνολα του s είναι απλά συνεκτικό.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Έστω S το πλήρες υποσύμπλοκο του K που αποτελείται από όλα τα μη κενά υποσύνολα του s.
Κάθε δύο κορυφές του S αποτελούν πέρατα μίας ακμής του S. Άρα S είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε μία κορυφή v_0 του S, και για κάθε άλλη κορυφή u_i του s, $i = 1, \ldots, n$, την ακμή $\{v_0, u_i\}$. Το σύμπλοκο με κορυφές $v_0, u_1, \ldots, u_n$ και ακμές $\{v_0, u_1\}, \ldots, \{v_0, u_n\}$ είναι ένα μέγιστο δέντρο T στο S. Κάθε διαδρομή στο S είναι ομοτοπική προς μία διαδρομή στο T: για παράδειγμα, το βήμα (u_1, u_2) είναι ισοδύναμο με τη διαδρομή $(u_1, v_0)(v_0, u_2)$, αφού το 2-άπλοκο ανήκει στο S. Άρα η θεμελιωδης ομάδα του S με βάση στο v_0 είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα του T, δηλαδή τετριμμένη. Άρα S είναι απλά συνεκτικό.

Άσκηση 4.3 Δείξτε οτι εάν $i : K^2 \hookrightarrow K$ είναι ο έγκλεισμός του 2-σκελετού στο σύμπλοκο K, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $i_* : \pi(K^2, w) \longrightarrow \pi(K, w)$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 4.4 Δείξτε οτι εάν T είναι πεπερασμένο δέντρο, v ο αριθμός των κορυφών του T, και e ο αριθμός των 1-απλόκων στο T, τότε $v - e = 1$.

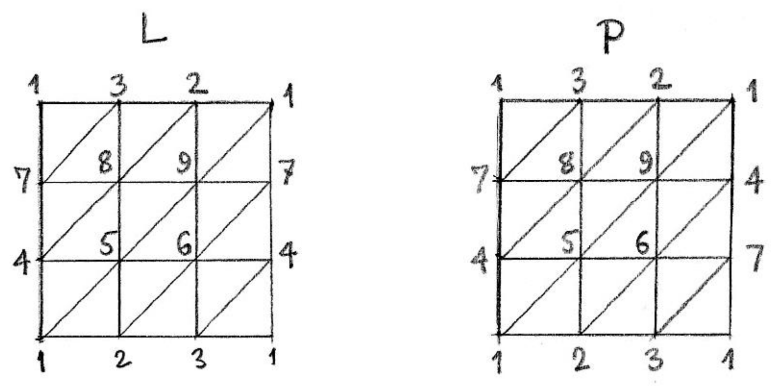
Άσκηση 4.5 Δείξτε οτι ένα σύμπλοκο διάστασης 1 είναι απλά συνεκτικό εάν και μόνον εάν είναι ένα δέντρο.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν T είναι δέντρο, τότε είναι συνεκτικό. Αφού το T δεν περιέχει κύκλους, κάθε κλειστή διαδρομή είναι τετριμμένη. Άρα T είναι απλά συνεκτικό.
Αντίστροφα, εάν K είναι απλά συνεκτικό σύμπλοκο διάστασης ένα, τότε K είναι συνεκτικό. Αφού κάθε κλειστή διαδρομή είναι ομοτοπική προς την τετριμμένη διαδρομή, K δεν περιέχει κύκλους. Άρα K είναι δέντρο.

Άσκηση 4.6 Θεωρήστε σύμπλοκο K διάστασης 1, w κορυφή του K, T δέντρο στο K και $\{u, v\}$ 1-άπλοκο του K που δεν περιέχεται στο T. Δείξτε οτι εάν υπάρχουν διαδρομές α', α'', β', β'' στο T τέτοιες ώστε $\alpha = \alpha'(u, v)\alpha''$ και $\beta = \beta'(u, v)\beta''$ είναι κλειστές διαδρομές στο K με αρχή και τέρμα στο w, τότε $\alpha \sim \beta$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δείξτε οτι οι διαδρομές $\alpha'\beta'^{-1}$ και $\alpha''\beta''^{-1}$ είναι τετριμμένες κλειστές διαδρομές, και οτι αυτό συνεπάγεται $\alpha \sim \beta$.

Άσκηση 4.7 Θεωρήστε τα σύμπλοκα L και P, διάστασης 2, με 9 κορυφές, 27 1-άπλοκα και 18 2-άπλοκα, συνδεδεμένα όπως στο σχήμα. Εφαρμόστε το Θεώρημα Tietze για να βρείτε μία παράσταση των ομάδων $\pi(L,\,1)$ και $\pi(P,\,1)$.



Σχήμα 1: Τα σύμπλοκα L και P.