ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Έστω K σύμπλοκο με κορυφές V, και $\mathcal{P} = \{X_i : i \in I\}$ μία διαμέριση του V. Ορίζουμε το **σύμπλοκο πηλίκο** $K/\mathcal{P}$ που έχει ως κορυφές τα σύνολα X_i, και $\{X_{i_0}, \ldots, X_{i_n}\}$ είναι άπλοκο εάν υπάρχουν κορυφές του K, $v_{i_j} \in X_{i_j}$, τέτοιες ώστε $\{v_{i_0}, \ldots v_{i_n}\}$ είναι άπλοκο του K.

Άσκηση 5.1 Δείξτε οτι η φυσική απεικόνιση $\nu : K \longrightarrow K/\mathcal{P}$ που στέλνει κάθε κορυφή στο σύνολο X_i που την περιέχει, είναι μορφισμός συμπλόκων.

Άσκηση 5.2 K συνεκτικό σύμπλοκο, L υποσύμπλοκο που είναι ξένη ένωση δέντρων. Δείξτε οτι υπάρχει μέγιστο δέντρο T στο K που περιέχει το L.
Υπόδειξη: Κατασκευάστε κατάλληλο σύμπλοκο πηλίκο.

Άσκηση 5.3 K σύμπλοκο, T και S δέντρα στο K με $T \cap S \neq \varnothing$. Δείξτε οτι τότε $T \cap S$ είναι δέντρο εάν και μόνον εάν $T \cap S$ είναι συνεκτικό.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $T \cap S$ περιέχει έναν κύκλο, τότε το ίδιο ισχύει για το T.

Άσκηση 5.4 Εάν T_1, T_2, T_3 είναι δέντρα στο K και $T_1 \cap T_2 = T_2 \cap T_3 = T_3 \cap T_1$ είναι δέντρο, δείξτε οτι $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ είναι δέντρο.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αφού T_1, T_2, T_3 είναι συνεκτικά και έχουν μη κενή τομή, το σύμπλοκο $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε οτι υπάρχει κύκλος σ στο $T_1 \cup T_2 \cup T_3$. Αυτός δεν περιέχεται σε ένα μόνο από τα T_1, T_2, T_3. Άρα περιέχει μία κορυφή v_0 στην τομή $T_1 \cap T_2 \cap T_3$. Μπορούμε να γράψουμε τη διαδρομή σ ως γινόμενο διαδρομών $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_k$ έτσι ώστε κάθε σ_i να περιέχεται σε ένα από τα T_j, και τα άκρα των διαδρομών σ_i να βρίσκονται στην τομή $T_1 \cap T_2 \cap T_3$. Αφού η τομή $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ είναι συνεκτική, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα σ_i με διαδρομές $\tilde{\sigma}_i$ με αρχή και πέρας στο v_0, τέτοιες ώστε κάθε $\tilde{\sigma}_i$ περιέχεται σε ένα T_j και $\sigma \sim \tilde{\sigma}_1 \cdot \tilde{\sigma}_2 \cdots \tilde{\sigma}_k$. Αλλά τότε κάποιο από τα $\tilde{\sigma}_i$ δεν είναι τετριμμένο. Αντίφαση, αφού κάθε T_j είναι δέντρο.

Άσκηση 5.5 Καλυπτική προβολή $p : L \longrightarrow K$, M συνεκτική συνιστώσα του K, N συνεκτική συνιστώσα της $p^{-1}(M)$. Δείξτε οτι $p|_N : N \longrightarrow M$ είναι καλυπτική προβολή.

Άσκηση 5.6 Καλυπτική προβολή $p : L \longrightarrow K$, T δέντρο στο K. Δείξτε οτι $p^{-1}(T)$ είναι ξένη ένωση δέντρων, και οτι υπάρχει μέγιστο δέντρο στο L που περιέχει την $p^{-1}(T)$.

Άσκηση 5.7 Βρείτε άπειρες διαφορετικές βάσεις για μία ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $\{x, y\}$ είναι μία βάση, τότε $\{x, x^n y x^{-n}\}$ είναι επίσης βάση, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

Άσκηση 5.8 Δείξτε οτι μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G έχει πεπερασμένο πλήθος υποομάδων H με $[G : H] = m$, $1 \leqslant m < \infty$.
Υπόδειξη: Σε κάθε υποομάδα $H \leqslant G$ αντιστοιχεί μία μετάθεση στο S_m: η δράση της G στο σύνολο G/H.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για κάθε υποομάδα $H \leqslant G$ με $[G : H] = m$, επιλέγουμε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση συνόλων $G/H \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$, και συνεπώς ισομορφισμό $S_{G/H} \cong S_m$.
Δείξτε οτι αφού G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, το πλήθος των ομομορφισμών $G \longrightarrow S_m$ είναι πεπερασμένο.
Θα δείξουμε οτι κάθε υποομάδα $H \leqslant G$ αντιστοιχεί σε έναν ομομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow S_m$ με $\ker\varphi \leqslant H \leqslant G$, και οτι για κάθε κανονική υποομάδα $N \lhd G$ με $[G : N] < \infty$, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος υποομάδων H με $N \leqslant H \leqslant G$:
G δρα στα αριστερά στο σύνολο των πλευρικών κλάσεων G/H, $a \cdot gH = agH$. Αυτή η δράση ορίζει έναν ομομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow S_m$. Εάν $a \in \ker\varphi$, τότε $agH = gH$ για κάθε $gH \in G/H$. Ειδικότερα, $aH = H$ και $a \in H$. Άρα $\ker\varphi \leqslant H$.
Εάν $N = \ker\varphi$, τότε από το Θεώρημα Αντιστοιχίας, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των υποομάδων H της G με $N \leqslant H \leqslant G$, και των υποομάδων της πεπερασμένης ομάδας G/N.

Άσκηση 5.9 Θεωρήστε σύνολα X_k, $k \in I$, ξένα ανά δύο. Εάν F_k είναι η ελεύθερη ομάδα στο X_k, δείξτε οτι $\ast_{k\in I} F_k$ είναι η ελεύθερη ομάδα στο $\bigcup_{k\in I} X_k$.

Άσκηση 5.10 Για κάθε a, b με $1 \neq a \in A$ και $1 \neq b \in B$ δείξτε οτι $aba^{-1}b^{-1}$ είναι στοιχείο άπειρης τάξης στο $A * B$.
Συμπεράνετε οτι $A * B$ είναι άπειρη ομάδα με κέντρο $Z(A * B) = 1$.

Άσκηση 5.11 Εάν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ και $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, δείξτε οτι $f_A \circ f_B = f_{AB}$.
Δείξτε επίσης οτι f_A διατηρεί το πρόσημο του $\operatorname{Im} z$.

Άσκηση 5.12 Δείξτε οτι εάν $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ και $f_A(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, τότε $A = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ για κάποιο $\vartheta \in [0, 2\pi)$, και εάν επίσης $f_A(2\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$, τότε $\vartheta = 0$.

Άσκηση 5.13 Δείξτε οτι κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης στο $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ έχει τάξη $n = 1, 2, 3, 4$ ή 6.
Δείξτε επίσης οτι κάθε τέτοιο στοιχείο είναι συζυγές προς ένα από τα $\pm I$, $\pm S$, $\pm R$.

Άσκηση 5.14 Δείξτε οτι ο πυρήνας του ομομορφισμού $Z_2 * Z_3 \longrightarrow Z_2 \times Z_3$ δεν έχει στρέψη.
Συμπεράνετε οτι η $\mathrm{PSL}(2, Z)$ έχει μία ελεύθερη υποομάδα με δείκτη 6.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δείξτε πρώτα οτι ένα στοιχείο $x^{\delta_1}y^{\varepsilon_1}\cdots x^{\delta_k}y^{\varepsilon_k}$, με $\delta_i \in \{0, 1\}$ και $\varepsilon_j \in \{0, 1, 2\}$, ανήκει στον πυρήνα εάν και μόνον εάν $\sum_{i=1}^{k} \delta_i = 2m$ και $\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j = 3n$, για $m, n \in \mathbb{Z}$.