ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Έστω K σύμπλοκο με κορυφές V, και $\mathcal{P} = \{X_i : i \in I\}$ μία διαμέριση του V. Ορίζουμε το **σύμπλοκο πηλίκο** $K/\mathcal{P}$ που έχει ως κορυφές τα σύνολα X_i, και $\{X_{i_0}, \ldots, X_{i_n}\}$ είναι άπλοκο εάν υπάρχουν κορυφές του K, $v_{i_j} \in X_{i_j}$, τέτοιες ώστε $\{v_{i_0}, \ldots v_{i_n}\}$ είναι άπλοκο του K.

Άσκηση 5.1 Δείξτε οτι η φυσική απεικόνιση $\nu : K \longrightarrow K/\mathcal{P}$ που στέλνει κάθε κορυφή στο σύνολο X_i που την περιέχει, είναι μορφισμός συμπλόκων.

Άσκηση 5.2 K συνεκτικό σύμπλοκο, L υποσύμπλοκο που είναι ξένη ένωση δέντρων. Δείξτε οτι υπάρχει μέγιστο δέντρο T στο K που περιέχει το L.
Υπόδειξη: Κατασκευάστε κατάλληλο σύμπλοκο πηλίκο.

Άσκηση 5.3 K σύμπλοκο, T και S δέντρα στο K με $T \cap S \neq \varnothing$. Δείξτε οτι τότε $T \cap S$ είναι δέντρο εάν και μόνον εάν $T \cap S$ είναι συνεκτικό.

Άσκηση 5.4 Εάν T_1, T_2, T_3 είναι δέντρα στο K και $T_1 \cap T_2 = T_2 \cap T_3 = T_3 \cap T_1$ είναι δέντρο, δείξτε οτι $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ είναι δέντρο.

Άσκηση 5.5 Καλυπτική προβολή $p : L \longrightarrow K$, M συνεκτική συνιστώσα του K, N συνεκτική συνιστώσα της $p^{-1}(M)$. Δείξτε οτι $p|_N : N \longrightarrow M$ είναι καλυπτική προβολή.

Άσκηση 5.6 Καλυπτική προβολή $p : L \longrightarrow K$, T δέντρο στο K. Δείξτε οτι $p^{-1}(T)$ είναι ξένη ένωση δέντρων, και οτι υπάρχει μέγιστο δέντρο στο L που περιέχει την $p^{-1}(T)$.

Άσκηση 5.7 Βρείτε άπειρες διαφορετικές βάσεις για μία ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες.

Άσκηση 5.8 Δείξτε οτι μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G έχει πεπερασμένο πλήθος υποομάδων H με $[G : H] = m$, $1 \leqslant m < \infty$.
Υπόδειξη: Σε κάθε υποομάδα $H \leqslant G$ αντιστοιχεί μία μετάθεση στο S_m: η δράση της G στο σύνολο G/H.

Άσκηση 5.9 Θεωρήστε σύνολα X_k, $k \in I$, ξένα ανά δύο. Εάν F_k είναι η ελεύθερη ομάδα στο X_k, δείξτε οτι $\ast_{k\in I} F_k$ είναι η ελεύθερη ομάδα στο $\bigcup_{k\in I} X_k$.

Άσκηση 5.10 Για κάθε a, b με $1 \neq a \in A$ και $1 \neq b \in B$ δείξτε οτι $aba^{-1}b^{-1}$ είναι στοιχείο άπειρης τάξης στο $A * B$.
Συμπεράνετε οτι $A * B$ είναι άπειρη ομάδα με κέντρο $Z(A * B) = 1$.

Άσκηση 5.11 Εάν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ και $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, δείξτε οτι $f_A \circ f_B = f_{AB}$.
Δείξτε επίσης οτι f_A διατηρεί το πρόσημο του $\operatorname{Im} z$.

Άσκηση 5.12 Δείξτε οτι εάν $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ και $f_A(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, τότε $A = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ για κάποιο $\vartheta \in [0, 2\pi)$, και εάν επίσης $f_A(2\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$, τότε $\vartheta = 0$.

Άσκηση 5.13 Δείξτε οτι κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης στο $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ έχει τάξη $n = 1, 2, 3, 4$ ή 6.
Δείξτε επίσης οτι κάθε τέτοιο στοιχείο είναι συζυγές προς ένα από τα $\pm I$, $\pm S$, $\pm R$.

Άσκηση 5.14 Δείξτε οτι ο πυρήνας του ομομορφισμού $Z_2 * Z_3 \longrightarrow Z_2 \times Z_3$ δεν έχει στρέψη.
Συμπεράνετε οτι η $\mathrm{PSL}(2, Z)$ έχει μία ελεύθερη υποομάδα με δείκτη 6.