ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Άσκηση 6.1 Δείξτε οτι η ομάδα του τριφυλιού B_3, με παράσταση $(a,\, b \,|\, aba = bab)$, είναι το αμάλγαμα $A_1 *_B A_2$, με $A_1 = A_2 = B = \mathbb{Z}$, ως προς τους μονομορφισμούς $\varepsilon_1(m) = 2m$ και $\varepsilon_2(n) = 3n$.
Δείξτε οτι η B_3 δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξεως διαφορετικά από το 1.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Συμβολίζουμε F_x και F_y τις ελεύθερες ομάδες με γεννήτορες x και y αντίστοιχα, και H_1, H_2 τις υποομάδες $H_1 = \langle x^2 \rangle$ και $H_2 = \langle y^3 \rangle$, (χρησιμοποιούμε πολλαπλασιαστικό συμβολισμό, αντί του προσθετικού στην εκφώνηση). Το αμάλγαμα $A = F_x *_\vartheta F_y$ μέσω του ισομορφισμού $\vartheta : x^2 \longmapsto y^3$ έχει παράσταση $(x,\, y \,|\, x^2 = y^3)$.

Θέλουμε να δείξουμε οτι αυτή η ομάδα είναι ισομορφική με την ομάδα του τριφυλιού, B_3, που έχει παράσταση $(a,\, b \,|\, aba = bab)$. Θα ορίσουμε ομομορφισμούς $\varphi : A \longrightarrow B_3$ και $\psi : B_3 \longrightarrow A$.

Θέτουμε $\varphi(x) = aba$ και $\varphi(y) = ba$. Για να είναι φ ομομορφισμός, πρέπει να ισχύει $\varphi(x)^2 = \varphi(y)^3$. Πράγματι, $\varphi(x)^2 = abaaba$, $\varphi(y)^3 = bababa$, και αφού $aba = bab$, $\varphi(x)^2 = \varphi(y)^3$.

Αντίστροφα, θέτουμε $\psi(a) = xy^{-1}$ και $\psi(b) = y^2x^{-1}$, και ελέγχουμε οτι η σχέση $x^2 = y^3$ συνεπάγεται $\psi(a)\psi(b)\psi(a) = \psi(b)\psi(a)\psi(b)$.

Έτσι έχουμε καλά ορσμένους ομομορφισμούς $\varphi : A \longrightarrow B_3$ και $\psi : B_3 \longrightarrow A$. Ελέγχουμε οτι $\varphi \circ \psi$ και $\psi \circ \varphi$ είναι οι ταυτοτικοί ομομορφισμοί:

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(a) &= \varphi(xy^{-1}) = abaa^{-1}b^{-1} = a \\
\varphi \circ \psi(b) &= \varphi(y^2x^{-1}) = babaa^{-1}b^{-1}a^{-1} = b \\
\psi \circ \varphi(x) &= \psi(aba) = xy^{-1}y^2x^{-1}xy^{-1} = x \\
\psi \circ \varphi(y) &= \psi(ba) = y^2x^{-1}xy^{-1} = y\,.
\end{aligned}$$

Ένα στοιχείο πεπερασμένης τάξης στο αμάλγαμα είναι συζυγές προς ένα στοιχείο της F_x ή της F_y. Αλλά αυτές οι ομάδες δεν έχουν στοιχεία πεπερασμένης τάξης.

Άσκηση 6.2 Δείξτε οτι η ομάδα $\mathrm{SL}(2,\, \mathbb{Z})$ είναι το αμάλγαμα $A_1 *_B A_2$ όπου $A_1 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $A_2 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ και $B \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, με τις υποομάδες A_1 και A_2 να παράγονται από τους πίνακες $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Οι ομάδες A_1 και A_2 έχουν παραστάσεις $(x \,|\, x^4)$ και $y \,|\, y^6)$ αντίστοιχα. Θεωρούμε το αμάλγαμα των A_1, A_2 μέσω του ισομορφισμού $\vartheta : x^2 \longmapsto y^3$, $G = A_1 *_\vartheta A_2 = (x,\, y \,|\, x^4,\, y^6,\, x^2 = y^3)$.

Θέτουμε $\varphi(x) = S$, $\varphi(y) = R$ και ελέγχουμε οτι $\varphi(x)^2 = \varphi(y)^3 = -I$. Άρα φ επεκτείνεται σε καλά ορισμένο ομομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\, \mathbb{Z})$. φ είναι επιμορφισμός, αφού οι πίνακες S και R παράγουν την $\mathrm{SL}(2,\, \mathbb{Z})$. Για να δείξουμε οτι φ είναι μονομορφισμός συγκρίνουμε με τον ισομορφισμό $\mathrm{PSL}(2,\, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ και την προβολή $\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

Εναλλακτικά, η θεωρία Bass – Serre δείχνει οτι φ είναι ισομορφισμός, αφού $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ δρα σε ένα δέντρο χωρίς αντιστροφές και με θεμελιώδη περιοχή μία ακμή.

Άσκηση 6.3 Βρείτε ανηγμένες μορφές, ως προς το αμάλγαμα της Άσκησης 6.2 για τις λέξεις S^3R^{-4}, $S^{-3}R^5$ και $R^5S^2RS^3R^3S$.

Άσκηση 6.4 Βρείτε κυκλικές ομάδες και κατάλληλες υποομάδες για να εκφράσετε τις ομάδες με τις ακόλουθες παραστάσεις ως αμαλγάματα κυκλικών ομάδων.

α΄. $(x, y \mid y^6, x^3 = y^3)$,

β΄. $(x, y \mid x^4, y^6, x^3 = y^3)$.

Η ακόλουθη άσκηση αναδεικνύει τη σημασία του ισομορφισμού που δίδει την αμαλγάμωση.

Άσκηση 6.5 Θεωρήστε την ομάδα A των συμμετριών του τετραγώνου, με παράσταση $(x, y \mid x^4, y^2, xy = yx^{-1})$, και B επίσης την ομάδα συμμετριών του τετραγώνου, με παράσταση $(u, v \mid u^4, v^2, uv = vu^{-1})$. Θεωρήστε τις υποομάδες $H = \langle x^2, y\rangle \leqslant A$ και $K = \langle u^2, v\rangle \leqslant B$. Κατασκευάζουμε τα αμαλγάματα $G_1 = A *_\varphi B$ και $G_2 = A *_\psi B$, όπου $\varphi : H \longrightarrow K$, $\varphi(x^2) = u^2$, $\varphi(y) = v$, και $\psi : H \longrightarrow K$, $\psi(x^2) = v$, $\psi(y) = u^2$.
Δείξτε οτι x^2 ανήκει στο κέντρο της G_1.
Δείξτε οτι G_2 έχει τετριμμένο κέντρο (θεωρήστε γνωστό οτι το κέντρο του αμαλγάματος $A_1 *_B A_2$ είναι υποομάδα της B, (MKS, σελ. 211).
Συμπεράνετε οτι G_1 και G_2 δεν είναι ισομορφικές.

Άσκηση 6.6 Θεωρήστε το αμάλγαμα $G = A_1 *_B A_2$, με $a_1 \in A_1$ και $a_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $\langle a_1\rangle \cap B = \{1\}$ και $\langle a_2\rangle \cap B = \{1\}$. Δείξτε οτι η υποομάδα $\langle a_1, a_2\rangle \leqslant G$ είναι ισομορφική με το ελεύθερο γινόμενο $\langle a_1\rangle * \langle a_2\rangle$.