ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Άσκηση 6.1 Δείξτε οτι η ομάδα του τριφυλιού B_3, με παράσταση $(a,\, b \,|\, aba = bab)$, είναι το αμάλγαμα $A_1 *_B A_2$, με $A_1 = A_2 = B = \mathbb{Z}$, ως προς τους μονομορφισμούς $\varepsilon_1(m) = 2m$ και $\varepsilon_2(n) = 3n$.
Δείξτε οτι η B_3 δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξεως διαφορετικά από το 1.

Άσκηση 6.2 Δείξτε οτι η ομάδα $\mathrm{SL}(2,\, \mathbb{Z})$ είναι το αμάλγαμα $A_1 *_B A_2$ όπου $A_1 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $A_2 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ και $B \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, με τις υποομάδες A_1 και A_2 να παράγονται από τους πίνακες $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 6.3 Βρείτε ανηγμένες μορφές, ως προς το αμάλγαμα της Άσκησης 6.2 για τις λέξεις S^3R^{-4}, $S^{-3}R^5$ και $R^5S^2RS^3R^3S$.

Άσκηση 6.4 Βρείτε κυκλικές ομάδες και κατάλληλες υποομάδες για να εκφράσετε τις ομάδες με τις ακόλουθες παραστάσεις ως αμαλγάματα κυκλικών ομάδων.

α΄. $(x,\, y \,|\, y^6,\, x^3 = y^3)$,

β΄. $(x,\, y \,|\, x^4,\, y^6,\, x^3 = y^3)$.

Η ακόλουθη άσκηση αναδεικνύει τη σημασία του ισομορφισμού που δίδει την αμαλγάμωση.

Άσκηση 6.5 Θεωρήστε την ομάδα A των συμμετριών του τετραγώνου, με παράσταση $(x,\, y \,|\, x^4,\, y^2,\, xy = yx^{-1})$, και B επίσης την ομάδα συμμετριών του τετραγώνου, με παράσταση $(u,\, v \,|\, u^4,\, v^2,\, uv = vu^{-1})$. Θεωρήστε τις υποομάδες $H = \langle x^2,\, y \rangle \leqslant A$ και $K = \langle u^2,\, v \rangle \leqslant B$. Κατασκευάζουμε τα αμαλγάματα $G_1 = A *_\varphi B$ και $G_2 = A *_\psi B$, όπου $\varphi : H \longrightarrow K$, $\varphi(x^2) = u^2$, $\varphi(y) = v$, και $\psi : H \longrightarrow K$, $\psi(x^2) = v$, $\psi(y) = u^2$.
Δείξτε οτι x^2 ανήκει στο κέντρο της G_1.
Δείξτε οτι G_2 έχει τετριμμένο κέντρο (θεωρήστε γνωστό οτι το κέντρο του αμαλγάματος $A_1 *_B A_2$ είναι υποομάδα της B, (MKS, σελ. 211).
Συμπεράνετε οτι G_1 και G_2 δεν είναι ισομορφικές.

Άσκηση 6.6 Θεωρήστε το αμάλγαμα $G = A_1 *_B A_2$, με $a_1 \in A_1$ και $a_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $\langle a_1 \rangle \cap B = \{1\}$ και $\langle a_2 \rangle \cap B = \{1\}$. Δείξτε οτι η υποομάδα $\langle a_1,\, a_2 \rangle \leqslant G$ είναι ισομορφική με το ελεύθερο γινόμενο $\langle a_1 \rangle * \langle a_2 \rangle$.