ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

Άσκηση 7.1 Δείξτε οτι η ομάδα $BS(1, 2)$, με παράσταση $(a, b \mid ab = b^2 a)$, είναι επέκταση HNN με βάση μία άπειρη κυκλική ομάδα.
Το ίδιο για την ομάδα $BS(p, q)$, με παράσταση $(a, b \mid ab^p = b^q a)$.
Οι ομάδες $BS(p, q)$ ονομάζονται ομάδες Baumslag – Solitar.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε την άπειρη κυκλική ομάδα $F = \langle b \rangle$, και τον μονομορφισμό $\varphi : F \longrightarrow F : b \longmapsto b^2$. Τότε η επέκταση HNN $B*_\varphi$ έχει παράσταση $(b, t \mid tbt^{-1} = b^2)$, και είναι ισόμορφη με την ομάδα $BS(1, 2)$.

Άσκηση 7.2 Θεωρήστε ομάδα G που είναι επέκταση HNN με βάση A και ευσταθές γράμμα t. Δείξτε οτι t έχει άπειρη τάξη στο G, και οτι $\langle t \rangle \cap A = \{1\}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε την επέκταση HNN $G = A*_\varphi$, όπου $B \leqslant A$ και $\varphi : B \longrightarrow A$ είναι μονομορφισμός. Εάν A έχει παράσταση $(X \mid \Delta)$, τότε G έχει παράσταση $(X \cup \{t\} \mid \Delta \cup \{tbt^{-1}\varphi(b^{-1}) : b \in B\})$.

Θέτουμε για κάθε $x \in X$, $\psi(x) = 0$, και $\psi(t) = 1$, (προσθετικός συμβολισμός!). Η ψ επεκτείνεται σε καλά ορισμένο ομομορφισμό $G \longrightarrow \mathbb{Z}$, αφού όλες οι σχέσεις στην G απεικονίζονται στο ταυτοτικό στοιχείο 0.

Εάν t έχει πεπερασμένη τάξη στην G, η τάξη της εικόνας $\psi(t)$ είναι διαιρέτης της τάξης του t. Συμπεραίνουμε οτι t έχει άπειρη τάξη.

Αφού $\psi(A) = 0$ και $\psi(t) = 1$, καμμία δύναμη του t δεν ανήκει στην A.

Άσκηση 7.3 Δείξτε οτι στην ομάδα G με παράσταση $(a, b, c \mid aba^{-1} = b^2, bcb^{-1} = c^2)$, τα στοιχεία a και c έχουν άπειρη τάξη, και $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle = \{1\}$.