Κεφάλαιο 10

Γεωμετρικές κατασκευές

Στα αιτήματα του Ευκλείδη περιλαμβάνονται μόνο τρία που αναφέρονται στη δυνατότητα κατασκευής ενός σχήματος.

Ηιτήσθω από παντός σημείου επί παν σημείον ευθείαν γραμμήν αγαγείν

Και πεπερασμένη ευθείαν κατά το συνεχες επ΄ ευθείας εκβαλείν

Και παντί κέντρω και διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Αυτό οδήγησε στο να λάβουν κεντρική θέση στη γεωμετρία οι κατασκευές που μπορούν να γίνου με κανόνα και διαβήτη. Ο **κανόνας** είναι ευθεία χωρίς κανένα διακεριμένο σημείο. Δεν έχει αρχή ή μονάδα μήκους. Επιτρέπει απλώς να συνδέουμε δύο δοθέντα σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα ή να προεκτείνουμε ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Ο **διαβήτης** επιτρέπει να σχεδιάζουμε κύκλους με δοθέν σημείο ως κέντρο και ακτίνα ίση με δοθέν διάστημα. Μπορούμε επίσης να τον χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε πάνω σε μία ευθεία ένα σημείο που να απέχει από δοθέν σημείο της ευθείας απόσταση ίση με δοθέν διάστημα.

Πολλές απλές κατασκευές δεν μπορούν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη. Αυτό οδήγησε στα λεγόμενα *άλυτα προβλήματα* της Ευκλείδειας γεωμετρίας:

- τριχοτόμηση τυχούσας γωνίας
- κατασκευή κανονικού επταγώνου
- διπλασιασμός του κύβου
- τετραγωνισμός του κύκλου

Αυτός ο περιορισμός του Ευκλείδη δεν εμπόδισε τους αρχαίους γεωμέτρες να χρησιμοποιήσουν και άλλα όργανα προκειμένου να λύσουν κάποια από αυτάτα προβλήματα, όπως τον κανόνα με δύο διακεκριμένα σημεία, τον γνώμονα και κάποιες συγκεκριμένες καμπύλες. Τον 19^o αιώνα αποδείχθηκε οτι αυτά τα προβλήματα δεν είναι δυνατόν να λυθούν με κανόνα και διαβήτη.

Βασικές κατασκευές

Για να κατασκευάσουμε ένα σημείο πρέπει να το εκφράσουμε ως τομή δύο ευθειών, δύο κύκλων ή μίας ευθείας και ενός κύκλου πουέχουν δοθεί ή μπορούν να κατασκευασθούν από τα δοθέντα.

Για να κατασκευάσουμε μία ευθεία αρκεί να γνωρίζουμε δύο σημεία της ευθείας τα οποία έχουν δοθεί ή ή μπορούν να κατασκευασθούν από τα δοθέντα.

Για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο αρκεί να γνωρίζουμε ένα σημείο (το κέντρο του κύκλου) και δύο σημαία των οποίων το διάστημα θα αποτελέσει την ακτίνα του κύκλου.

Η διαδικασία της κατασκευής διακρίνεται στην **ανάλυση**, τη **σύνθεση**, την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

Αν. Στην ανάλυση θεωρούμε οτι έχει κατασκευαστεί το ζητούμενο σχήμα, και προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες που ανάγουν την κατασκευή του σε θεμελιώδεις γεωμετρικές κατασκευές ή σε κατασκευές που ήδη γνωρίζουμε. Η ανάλυση στοχεύει να μας υποδείξει το δρόμο για τη λύση του προβλήματος.

Σύν. Στη σύνθεση, ακολουθώντας τη λογικά αντίστροφη πορεία της ανάλυσης, περιγράφουμε τις επι μέρους κατασκευές που οδηγούν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος.

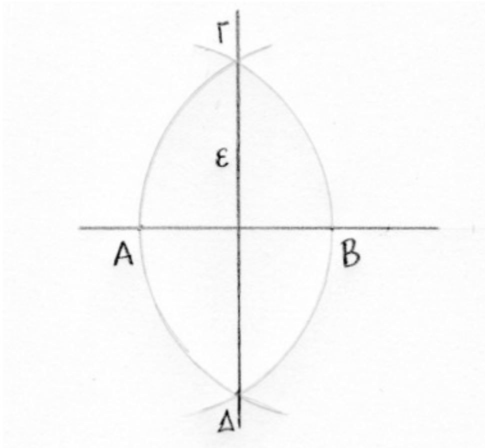
Απ. Αφού ολοκλρώσουμε τη σύνθεση, αποδεικνύουμε οτι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει όλες τις ζητούμενες ιδιότητες.

Διερ. Με τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις ή να μην υπάρχει καμία λύση. Στη διερεύνηση αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα για να υπάρχει λύση, και εξετάζουμε την ύπαρξη περισσοτέρων λύσεων.

Στις επόμενες κατασκευές θα δούμε διεξοδικά τα τέσσερα μέρη.

Κατασκευή 10.1 *Να κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος.*

Αν. Εάν γνωρίζω δύο σημεία της μεσοκαθέτου του AB, μπορώ να τη σχεδιάσω. Τα σημεία της μεσοκαθέτου είναι αυτά που ισαπέχουν από τα A και B. Ένα σημείο που ισαπέχει από τα A και B είναι σημείο τομής δύο κύκλων με κέντρο A, B και ίση ακτίνα.



Σχήμα 10.1: Κατασκευή μεσοκαθέτου.

Σύν. Θεωρώ τους κύκλους (Α, ΑΒ) και (Β, ΒΑ). Αφού η απόσταση των κέντρων είναι μικρότερη από το άθροισμα των ακτίνων, οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία, Γ και Δ. Φέρω την ευθεία ε που περνάει από τα Γ και Δ. Αυτή είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

Απ. Πράγματι, εάν ένα σημείο ισαπέχει από τα Α, Β βρίσκεται στην μεσοκάθετο. Άρα τα Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο, και συνεπώς η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος.

Διερ. Παρατηρούμε οτι πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η μεσοκάθετος του διαστήματος ΑΒ, και οτι ειναι μοναδική.

Κατασκευή 10.2 *Να κατασκευάσουμε το μέσο ευθύγραμμου τμήματος.*

Αν. Υποθέτουμε οτι έχουμε βρεί το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το Μ είναι το σημείο τομής του ΑΒ με τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ.

Σύν. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ. Αυτή τέμνει την ευθεία ΑΒ σε ένα σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ.

Απ. Πράγματι, τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα Α και Β. Άρα το σημείο Μ ισαπέχει από τα Α, Β και βρίσκεται στο διάστημα ΑΒ, άρα είναι το μέσο του ΑΒ.

Διερ. Παρατηρούμε οτι πάντα μπορεί να κατασκευαστεί το μέσο του διαστήματος ΑΒ, και οτι ειναι μοναδικό.

Κατασκευή 10.3 *Να κατασκευάσουμε κάθετη σε δοθείσα ευθεία η από δοθέν σημείο Α που βρίσκεται πάνω στην ευθεία.*

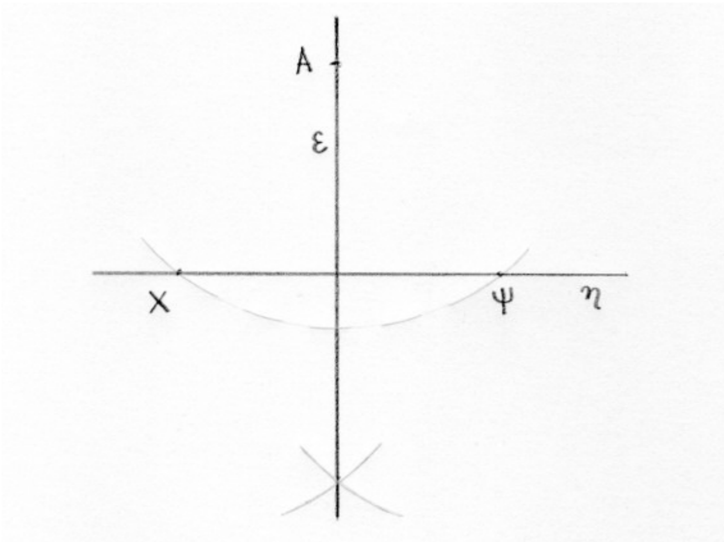
Αν. Η κάθετος στο Α είναι μεσοκάθετος κάθε διαστήματος στην ευθεία η του οποίου το Α είναι το μέσο. Άρα αρκεί να βρούμε ένα τέτοιο διάστημα.

Σύν. Έστω Χ τυχόν σημείο της ευθείας, διαφορετικό από το Α. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΧ φέρομε κύκλο. Αυτός τέμνει την η σε άλλο ένα σημείο, έστω Ψ. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του ΧΨ.

Απ. Η ε περνάει από το σημείο Α και είναι κάθετη στην η.

Διερ. Πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η κάθετος από το Α, και ειναι μοναδική.

Κατασκευή 10.4 *Να κατασκευάσουμε κάθετη σε δοθείσα ευθεία η από δοθέν σημείο Α που βρίσκεται έξω από την ευθεία.*



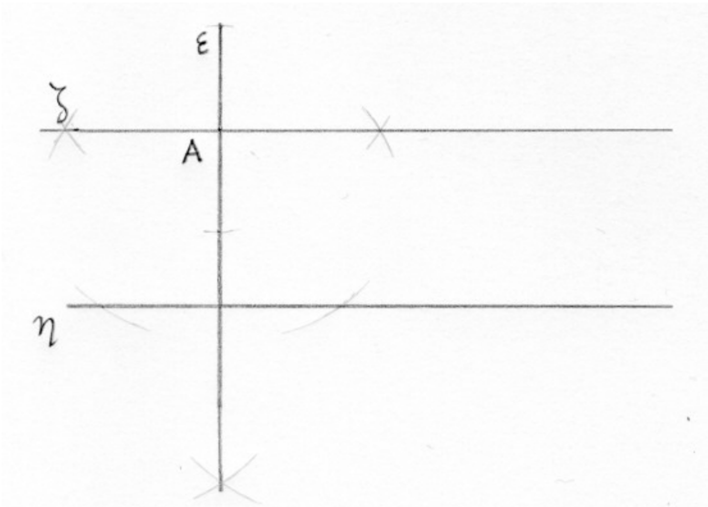
Σχήμα 10.2: Κατασκευή κάθετης από σημείο εκτός της ευθείας.

Αν. Εάν Χ και Ψ είναι σημεία στην η που ισαπέχουν από το Α, τότε η μεσοκάθετος του ΧΨ είναι ευθεία κάθετος στην η που περνάει από το Α.

Σύν. Έστω Χ τυχόν σημείο της ευθείας. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΧ φέρομε κύκλο. Εάν αυτός εφάπτεται στην η, ΑΧ είναι η ζητούμενη ευθεία ε. Εάν αυτός τέμνει την η σε άλλο ένα σημείο, έστω Ψ, κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του ΧΨ.

Απ. Η ε περνάει από το σημείο Α και είναι κάθετη στην η.

Διερ. Πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η κάθετος από το Α, και ειναι μοναδική.



Σχήμα 10.3: Κατασκευή παράλληλης ευθείας.

Κατασκευή 10.5 *Να κατασκευάσουμε παράλληλη σε δοθείσα ευθεία η από δοθέν σημείο A που βρίσκεται έξω από την ευθεία.*

Αν. Εάν οι ευθείες η και ζ είναι παράλληλες, τότε κάθε ευθεία κάθετη στην η είναι κάθετη και στη ζ.

Σύν. Από το A φέρομε ευθεία ε κάθετη στην η. Από το A φέρομε ευθεία ζ κάθετη στην ε.

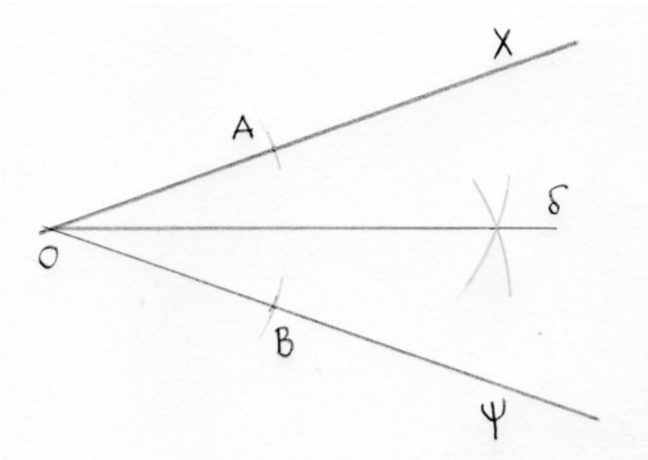
Απ. Η ζ περνάει από το σημείο A. Η ε τέμνει τις ζ και η και σχηματίζει τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, άρα η ζ είναι παράλληλη προς την η.

Διερ. Πάντα μπορεί να κατασκευαστεί η παράλληλη από το A, και ειναι μοναδική.

Κατασκευή 10.6 *Να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο γωνίας $\angle X O \Psi$.*

Αν. Εάν τα σημεία A και B πάνω στις ημιευθείες OX και OΨ αντίστοιχα ισαπέχουν από το O, τότε το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου OAB είναι και διχοτόμος της γωνίας $\angle$AOB.

Σύν. Επιλέγομε σημείο A πάνω στην ημιευθεία OX και φέρομε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα OA ο οποίος τέμνει την ημιευθεία OΨ στο σημείο B. Από το O φέρομε ευθεία δ κάθετη στην AB. Αυτή είναι η διχοτόμος της $\angle$XOΨ.



Σχήμα 10.4: Κατασκευή διχοτόμου.

Άσκηση 10.1 Να κατασκευάσετε γωνία με πλευρά σε δοθείσα ημιευθεία ΟΧ, ίση προς δοθείσα γωνία $\angle$ΑΚΒ.

Άσκηση 10.2 Να κατασκευάσετε κύκλο με ακτίνα $r = \Gamma\Delta$, που να περνάει από τα σημεία Α και Β. (Προσοχή στη διερεύνηση. Ποιά σχέση πρέπει να έχουν τα διαστήματα ΑΒ και ΓΔ για να υπάρχει λύση;)

Άσκηση 10.3 Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ίσες με τα διαστήματα ΔΕ, ΖΗ και ΘΚ.

Άσκηση 10.4 Να κατασκευάσετε ευθεία εφαπτομένη σε κύκλο σε δοθέν σημείο του κύκλου.

Άσκηση 10.5 Να κατασκευάσετε ευθεία εφαπτομένη σε κύκλο που περνάει από δοθέν σημείο έξω από τον κύκλο.

Άσκηση 10.6 Να κατασκευάσετε ισοσκελές τραπέζιο όταν γνωρίζετε μία γωνία του και το άθροισμα των βάσεών του.

Άσκηση 10.7 Να κατασκευάσετε τρίγωνο όταν γνωρίζετε την πλευρά α, το ύψος υ_α και τη διάμεσο μ_α.

Άσκηση 10.8 Να κατασκευάσετε τρίγωνο όταν γνωρίζετε την πλευρά α, το ύψος υ_α και τη διάμεσο μ_β.

Άσκηση 10.9 Δίδονται κύκλοι (Κ, α) και (Ο, β), με ΟΚ $> \alpha + \beta$. Να κατασκευάσετε τις ευθείες που είναι κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων, και αυτές που είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Άσκηση 10.10 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία οι δύο εφαπτόμενες προς δοθέντα κύκλο είναι κάθετες μεταξύ τους.