ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 234 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Ιδιότητες τοπολογικών χώρων.

Άσκηση 9.1 Show that $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Find an example (in $I = [0,\, 1]$) to show that the equality does not hold for infinite unions

Δείξτε οτι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Βρείτε παράδειγμα (στο $I = [0,\, 1]$) για να δείξετε οτι για άπειρες ενώσεις δεν ισχύει η ισότητα.

Άσκηση 9.2 Show that the topological space X is Hausdorff if and only if the **diagonal** $\Delta\{(x,\, x)\,:\, x \in X\}$ is a closed subset of $X \times X$.

Δείξτε οτι ο τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff εάν και μόνον εάν η διαγώνιος $\Delta = \{(x,\, x)\,:\, x \in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.

Άσκηση 9.3 If X and Y are Hausdorff spaces and $f : X \longrightarrow Y$ is a continuous function, show that the **graph** of f, $G_f = \{(x,\, y) \in X \times Y \,:\, y = f(x)\}$ is a closed subset of $X \times Y$.

Εάν X και Y είναι χώροι Hausdorff και $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής συνάρτηση, δείξτε οτι το γράφημα της f, $G_f = \{(x,\, y) \in X \times Y \,:\, y = f(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$.

Άσκηση 9.4 Show that there is no continuous surjection $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Δείξτε οτι δεν υπάρχει καμία συνεχής **επεικόνιση** $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Άσκηση 9.5 Show that if $(X,\, \mathcal{T})$ is a connected topological space and $\mathcal{T}_1$ is a topology on the set X smaller than $\mathcal{T}$, then $(X,\, \mathcal{T}_1)$ is connected.

Δείξτε οτι εάν ο τοπολογικός χώρος $(X,\, \mathcal{T})$ είναι συνεκτικός και $\mathcal{T}_1$ είναι τοπολογία στο σύνολο X μικρότερη από την $\mathcal{T}$, τότε $(X,\, \mathcal{T}_1)$ είναι συνεκτικός.

Άσκηση 9.6 Let A_n be a sequence of connected subspaces of X, such that $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ for every n. Show that $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ is a connected subspace of X.

Έστω A_n ακολουθία συνεκτικών υπόχωρων του X, τέτοια ώστε $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ για κάθε n. Δείξτε οτι $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικός υπόχωρος του X.

Άσκηση 9.7 Show that every connected component of a topological space X is a connected closed subset of X. Find an example to show that connected components need not be open subsets.

Δείξτε οτι κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός τοπολογικού χώρου X είναι συνεκτικό και κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε με ένα παράδειγμα οτι οι συνεκτικές συνιστώσες μπορεί να μην είναι ανοικτά υποσύνολα.

Άσκηση 9.8 Show that every convex subset of $\mathbb{R}^n$ is connected.

Δείξτε οτι κάθε κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό.

Άσκηση 9.9 One-point compactification
If X is a non compact Hausdorff space, we define a topology on the set $\tilde{X} = X \sqcup \{*\}$ as follows: A is open in $\tilde{X}$ if either $A \subseteq X$ and A is open in X, or $* \in A$ and $X \setminus A$ is a compact subset of X.

1. Show that $\tilde{X}$ is a compact space.
2. If $X = \mathbb{R}$, show that $\tilde{X} \cong S^1$.
3. If $Y = \mathbb{R}^2$, show that $\tilde{Y} \cong S^2$.

Συμπαγοποίηση ενός σημείου
Εάν X είναι μη συμπαγής χώρος Hausdorff, ορίζουμε μία τοπολογία στο σύνολο $\tilde{X} = X \sqcup \{*\}$ με τον ακόλουθο τρόπο: A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\tilde{X}$ εάν είτε $A \subseteq X$ και A είναι ανοικτό στο X, ή $* \in A$ και $X \setminus A$ είναι συμπαγές υποσύνολο στο X.

1. Δείξτε οτι $\tilde{X}$ είναι συμπαγής χώρος.
2. Εάν $X = \mathbb{R}$, δείξτε οτι $\tilde{X} \cong S^1$.
3. Εάν $Y = \mathbb{R}^2$, δείξτε οτι $\tilde{Y} \cong S^2$.