

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

Άσκηση 1.1 Γράψτε την εξίσωση χρησιμοποιώντας πίνακες, υπολογίστε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα των συντελεστών δευτέρου βαθμού και βρείτε την εξίσωση σε κανονική μορφή για τις μη εκφυλισμένες κωνικές

α'. $11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0,$

β'. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 8y + 5 = 0.$

Βρείτε το κέντρο (εάν είναι υπερβολή ή έλλειψη) ή την κορυφή (εάν είναι παραβολή) ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

Άσκηση 1.2 Βρείτε τον τύπο των μη εκφυλισμένων κωνικών

α'. $3x^2 - 8xy + 2y^2 - 2x + 4y - 16 = 0,$

β'. $x^2 + 8xy + 16y^2 - x + 8y - 12 = 0.$

Άσκηση 1.3 Βρείτε το είδος της κωνικής και προσδιορίστε το κέντρο ή την κορυφή, τις εξισώσεις των αξόνων και την εκκεντρότητα για τις μη εκφυλισμένες κωνικές

α'. $x^2 - 4xy - 2y^2 + 6x + 12y + 21 = 0,$

β'. $5x^2 + 4xy + 5y^2 + 20x + 8y - 1 = 0,$

γ'. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 8y + 5 = 0.$

Άσκηση 1.4 Εξετάστε εάν οι ακόλουθες απεικονίσεις είναι ευκλείδειες ισομετρίες του επιπέδου

α'.

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

β'.

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

γ' .

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.5 Βρείτε την αντίστροφη απεικόνιση των ευκλείδειων ισομετριών

α' .

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

β' .

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.6 Υπολογίστε τις συνθέσεις $t_1 \circ t_2$ και $t_2 \circ t_1$ των ευκλείδειων ισομετριών

$$t_1(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και

$$t_2(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$