

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

Άσκηση 10.1 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $0, 1, \infty \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Θεωρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, $f^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Αφού $f^{-1}(0) = 1$, $b = d$, αφού $f^{-1}(\infty) = -3$, $a = -3c$ και αφού $f^{-1}(1) = 2$, $b = -5$. Άρα $f(z) = \frac{-5z+5}{-z-3}$.

Άσκηση 10.2 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $2, -3, 1 \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Είναι ο μετασχηματισμός $g \circ f$, όπου f είναι ο μετασχηματισμός της Άσκησης 10.1 και $g(z) = \frac{5z-8}{5z-4}$.

Άσκηση 10.3 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(1, 3)$.

Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(3, 2)$.

Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, 3)$ στην $(3, 2)$.

Άσκηση 10.4 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο $1 + i\sqrt{3}$ στο i .

Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο $-2 + i\sqrt{3}$ στο i .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το σημείο $1 + i\sqrt{3}$ δεν βρίσκεται πάνω στην υ-ευθεία $(1, -3)$, και συνεπώς δεν απεικονίζεται στην $(0, \infty)$. Άρα δεν υπάρχει τέτοιος μετασχηματισμός.

Ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει την $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ είναι ο $f(z) = \frac{bz-b}{-z-3}$. $f(-2 + i\sqrt{3}) = b\sqrt{3}i$, άρα $b = 1/\sqrt{3}$.

Άσκηση 10.5 Φέρετε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Möbius σε κανονική μορφή $\frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$, και εξετάστε εάν είναι ελλειπτικοί, παραβολικοί ή υπερβολικοί. Σε κάθε

περίπτωση, βρείτε τα σταθερά σημεία τους.

$$\alpha'. f(z) = -\frac{1}{z}$$

$$\beta'. f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$$

$$\gamma'. f(z) = z + 1$$

$$\delta'. f(z) = 3z$$

$$\epsilon'. f(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}$$

$$\zeta'. f(z) = \frac{z}{-2z+1}$$

$$\zeta'. f(z) = 3z + 1$$

$$\eta'. f(z) = \frac{2z+1}{-2z}$$

$$\theta'. f(z) = \frac{z}{4z+3}$$

$$\iota'. f(z) = \frac{-3}{z}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\alpha')$ $f(z) = \frac{0z-1}{1z+0}$, ελλειπτικός, σταθερό σημείο i .

$\beta')$ $f(z) = \frac{(1/\sqrt{2})z+1/\sqrt{2}}{(-1/\sqrt{2})z+1/\sqrt{2}}$, ελλειπτικός, σταθερό σημείο i .

$\zeta')$ $f(z) = \frac{1z+0}{-2z+1}$, παραβολικός, σταθερό σημείο 0 .

$\zeta')$ $f(z) = \frac{\sqrt{3}z+1/\sqrt{3}}{0z+1/\sqrt{3}}$, υπερβολικός, σταθερά σημεία ∞ και $-1/2$.

Άσκηση 10.6 Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των υ-ευθειών $\varepsilon_{-1,2}$ και $\varepsilon_{2,3}$ (δηλαδή των ημικυκλίων με κέντρο -1 και ακτίνα 2 και με κέντρο 2 και ακτίνα 3).

Απάντηση - Υπόδειξη.

Από (Ευκλείδειο) Κανόνα Συνημιτόνων, $\cos \vartheta = -1/3$.

Άσκηση 10.7 Βρείτε την προσημασμένη γωνία από την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(-1, 3)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\vartheta = -\pi/3$.

Άσκηση 10.8 Βρείτε τα σταθερά σημεία των μετασχηματισμών Möbius:

$$\alpha'. f(z) = \frac{z-2}{z+3}$$

$$\beta'. f(z) = \frac{-3z+1}{2z-2}$$

$$\gamma'. f(z) = \frac{z-1}{4z+5}$$

$$\delta'. f(z) = \frac{-z-4}{z+3}$$

και διακρίνετε τον τύπο κάθε μετασχηματισμού: ελλειπτικό, παραβολικό ή υπερβολικό.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\alpha')$ Σταθερό σημείο $-1 + i \in \mathcal{H}$, ελλειπτικός.

$\beta')$ Σταθερά σημεία $-1, \frac{1}{2} \in \partial\mathcal{H}$, υπερβολικός.

Άσκηση 10.9 Για τους μετασχηματισμούς της Άσκησης 10.8, βρείτε την παράμετρο τ και επιβεβαιώστε τον τύπο του μετασχηματισμού.