

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

Άσκηση 10.1 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $0, 1, \infty \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 10.2 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $2, -3, 1 \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 10.3 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(1, 3)$.

Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(3, 2)$.

Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, 3)$ στην $(3, 2)$.

Άσκηση 10.4 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο $1 + i\sqrt{3}$ στο i .

Άσκηση 10.5 Φέρετε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Möbius σε κανονική μορφή $\frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$, και εξετάστε εάν είναι ελλειπτικοί, παραβολικοί ή υπερβολικοί. Σε κάθε περίπτωση, βρείτε τα σταθερά σημεία τους.

$$\alpha'. f(z) = -\frac{1}{z}$$

$$\beta'. f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$$

$$\gamma'. f(z) = z + 1$$

$$\delta'. f(z) = 3z$$

$$\varepsilon'. f(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}$$

$$\varphi'. f(z) = \frac{z}{-2z+1}$$

$$\zeta'. f(z) = 3z + 1$$

$$\eta'. f(z) = \frac{2z+1}{-2z}$$

$$\theta'. f(z) = \frac{z}{4z+3}$$

$$\iota'. f(z) = \frac{-3}{z}$$

Άσκηση 10.6 Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των υ-ευθειών $\varepsilon_{-1,2}$ και $\varepsilon_{2,3}$ (δηλαδή των ημικυκλίων με κέντρο -1 και ακτίνα 2 και με κέντρο 2 και ακτίνα 3).

Άσκηση 10.7 Βρείτε την προσημασμένη γωνία από την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(-1, 3)$.

Άσκηση 10.8 Βρείτε τα σταθερά σημεία των μετασχηματισμών Möbius:

$$\alpha'. f(z) = \frac{z-2}{z+3}$$

$$\beta'. f(z) = \frac{-3z+1}{2z-2}$$

$$\gamma'. f(z) = \frac{z-1}{4z+5}$$

$$\delta'. f(z) = \frac{-z-4}{z+3}$$

και διακρίνετε τον τύπο κάθε μετασχηματισμού: ελλειπτικό, παραβολικό ή υπερβολικό.

Άσκηση 10.9 Για τους μετασχηματισμούς της Άσκησης 10.8, βρείτε την παράμετρο τ και επιβεβαιώστε τον τύπο του μετασχηματισμού.