ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 11

Άσκηση 11.1 Για τους μετασχηματισμούς Möbius:

α΄. $f(z) = \frac{z-2}{z+3}$ β΄. $f(z) = \frac{-3z+1}{2z-2}$

γ΄. $f(z) = \frac{z-1}{4z+5}$ δ΄. $f(z) = \frac{-z-4}{z+3}$

βρείτε το μετασχηματισμό h έτσι ώστε ο συζυγής $h \circ f \circ h^{-1}$ να είναι σε κανονική μορφή, και υπολογίστε την κανονική μορφή.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄) h πρέπει να απεικονίζει το σταθερό σημείο στο i: $h(z) = z + 1$. Αφού

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

η κανονική μορφή είναι η $z \mapsto \frac{2z-1}{z+2}$.

Άσκηση 11.2 Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ της υ-ευθείας $(0, \infty)$ και της εικόνας της από τον ελλειπτικό μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{\cos\vartheta\, z + \sin\vartheta}{-\sin\vartheta\, z + \cos\vartheta}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
$f(0, \infty) = (\tan\vartheta, -\cot\vartheta)$. Η γωνία είναι $\varphi = 2\vartheta$.

Άσκηση 11.3 Θεωρήστε το μετασχηματισμό Möbius

$$f(z) = \frac{\sqrt{3}z + 1}{-z + \sqrt{3}}.$$

α΄. Δείξτε οτι $f^6(z) = z$ για κάθε $z \in \mathcal{H}$.

β΄. Δείξτε οτι εάν $\beta = -c\alpha$, όπου $\alpha > 0$ και $c = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, τότε οι ευθείες (α, β) και $(-\beta, -\alpha)$ τέμνονται σε ορθή γωνία.

γ΄. Βρείτε α τέτοιο ώστε η υ-ευθεία (α, β) να απεικονίζεται από τον μετασχηματισμό Möbius f στην υ-ευθεία $(-\beta, -\alpha)$ (δηλαδή $f(\alpha) = c\alpha$). Λύστε την εξίσωση αριθμητικά, χρησιμοποιώντας Matlab ή Excel.

δ΄. Χρησιμοποιώντας μία από τις δύο τιμές του α που βρήκατε, υπολογίστε (με Matlab ή Excel) τα σημεία $f(\alpha)$, $f^2(\alpha)$, $\ldots$, $f^5(\alpha)$ και τα σημεία $\beta = -c\alpha$, $f(\beta)$, $\ldots$, $f^5(\beta)$..

ε΄. Σχεδιάστε τις υ-ευθείες $(\alpha,\, \beta)$, $(f(\alpha),\, f(\beta))$, $\ldots$, $(f^5(\alpha),\, f^5(\beta))$. Τι υπερβολικό σχήμα σχεδιάσατε; Τι γωνία σχηματίζουν οι πλευρές του;

Απάντηση - Υπόδειξη.
β΄) Για να τέμνονται ορθογώνια οι υ-ευθείες $\varepsilon_{\kappa,r}$ και $\varepsilon_{\lambda,s}$, πρέπει να ισχύει $(\kappa-\lambda)^2 = r^2+s^2$. Για τις υ-ευθείες $(\alpha,\, \beta)$ και $(-\beta,\, \alpha)$ αυτή η σχέση γίνεται $2(\alpha+\beta)^2 = (\alpha-\beta)^2$, και ικανοποιείται όταν $-\beta/\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.
γ΄) $\alpha = 1,3032$ ή $\alpha = 0,1317$.
Πρέπει να κατασκευάσετε ένα κανονικό ορθογώνιο εξάγωνο.

Άσκηση 11.4 Υπολογίστε την υπερβολική απόσταση $d(z,\, w)$ μεταξύ των σημείων

α΄. $z = \mathrm{i},\ w = \frac{\mathrm{i}}{r}$

β΄. $z = 3+2\mathrm{i},\ w = 3+\frac{\mathrm{i}}{2}$

γ΄. $z = 3+4\mathrm{i},\ w = -3+4\mathrm{i}\,.$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄) $\log r\,,$ β΄) $\log 4\,,$ γ΄) $\log\left(\frac{(-8+4\mathrm{i})(8+4\mathrm{i})}{(2+4\mathrm{i})(-2+4\mathrm{i})}\right) = \log 4.$

Άσκηση 11.5 Θεωρήστε το σύνολο $K = \{w \in \mathcal{H} : w = t + \mathrm{i}t,\ t > 0\}$ και το σημείο $z = x + \mathrm{i}y$. Βρείτε την απόσταση από το σημείο z στο σύνολο K,

$$d(z,\, K) = \inf\{d(z,\, w) : w \in K\}\,.$$

Βρείτε το πλησιέστερο προς το z σημείο του K και περιγράψτε το γεωμετρικά.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\cosh d(z,\, w) = 1 + \frac{(x-t)^2+(y-t)^2}{2yt} = \frac{x^2+y^2+2t^2}{2yt} - \frac{x}{y}$, και η συνάρτηση $\cosh r$ είναι αύξουσα για $r > 0$. Άρα η ελάχιστη απόσταση είναι όταν $\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2+y^2+2t^2}{2yt}\right) = 0$, δηλαδή όταν $x^2+y^2 = 2t^2$. Το πλησιέστερο σημείο είναι το σημείο του K πάνω στην υ-ευθεία με πέρατα $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Άσκηση 11.6 Αποδείξτε τις υπερβολικές ταυτότητες

α΄. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

β΄. $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$

γ΄. $\cosh\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t+1}{2}}$

δ΄. $\sinh\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t-1}{2}}$

Άσκηση 11.7 Θεωρήστε τα σημεία $z = r\mathrm{i}$, $w_0 = t\mathrm{i}$ και $w_1 = s + t\mathrm{i}$. Δείξτε οτι

$$d(z,\, w_1) \geq d(z,\, w_0)$$

με ισότητα μόνον όταν $s = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\cosh d(ri,\, s+ti) = \frac{s^2+t^2+r^2}{2tr}$ και $\cosh d(ri,\, ti) = \frac{t^2+r^2}{2tr}$.

Άσκηση 11.8 Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: εάν $z,\, u,\, w \in \mathcal{H}$,

$$d(z,\, w) \leq d(z,\, u) + d(u,\, w)\,,$$

με ισότητα μόνον όταν το u βρίσκεται μεταξύ των z και w.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Υποθέτουμε $z = ri$, $w = pi$, $u = s + ti$, με $r < p$. Εξετάζουμε περιπτώσεις:

α'. εάν u βρίσκεται μεταξύ των z και w, τότε $r < t < p$ και $s = 0$. Υπολογίζουμε $d(z,\, w) = \log(p/r) = \log(p/t) + \log(t/r) = d(z,\, u) + d(u,\, w)$.

β'. εάν $r < t < p$ και $s \neq 0$, από την Άσκηση 11.7 έχουμε $d(z,\, u) + d(u,\, w) > d(z,\, ti) + d(ti,\, w) = d(z,\, w)$

γ'. εάν $t < r$ ή $t > p$, συνδυάζοντας τα προηγούμενα δείχνουμε οτι $d(z,\, w) \leq d(z,\, u) + d(u,\, w)$.