

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Φυλλάδιο Προβλημάτων 11

Άσκηση 11.1 Για τους μετασχηματισμούς Möbius:

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = \frac{z-2}{z+3} \\ \beta'. & f(z) = \frac{-3z+1}{2z-2} \\ \gamma'. & f(z) = \frac{z-1}{4z+5} \\ \delta'. & f(z) = \frac{-z-4}{z+3} \end{array}$$

βρείτε το μετασχηματισμό h έτσι ώστε ο συζυγής $h \circ f \circ h^{-1}$ να είναι σε κανονική μορφή, και υπολογίστε την κανονική μορφή.

Άσκηση 11.2 Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ της υ-ευθείας $(0, \infty)$ και της εικόνας της από τον ελλειπτικό μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}.$$

Άσκηση 11.3 Θεωρήστε το μετασχηματισμό Möbius

$$f(z) = \frac{\sqrt{3}z + 1}{-z + \sqrt{3}}.$$

α'. Δείξτε ότι $f^6(z) = z$ για κάθε $z \in \mathcal{H}$.

β'. Δείξτε ότι εάν $\beta = -c\alpha$, όπου $\alpha > 0$ και $c = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, τότε οι ευθείες (α, β) και $(-\beta, -\alpha)$ τέμνονται σε ορθή γωνία.

γ'. Βρείτε α τέτοιο ώστε η υ-ευθεία (α, β) να απεικονίζεται από τον μετασχηματισμό Möbius f στην υ-ευθεία $(-\beta, -\alpha)$ (δηλαδή $f(\alpha) = c\alpha$). Λύστε την εξίσωση αριθμητικά, χρησιμοποιώντας Matlab ή Excel.

δ'. Χρησιμοποιώντας μία από τις δύο τιμές του α που βρήκατε, υπολογίστε (με Matlab ή Excel) τα σημεία $f(\alpha), f^2(\alpha), \dots, f^5(\alpha)$ και τα σημεία $\beta = -c\alpha, f(\beta), \dots, f^5(\beta)$.

ε'. Σχεδιάστε τις υ-ευθείες $(\alpha, \beta), (\Psi(\alpha), f(\beta)), \dots, (f^5(\alpha), f^5(\beta))$. Τι υπερβολικό σχήμα σχεδιάσατε; Τι γωνία σχηματίζουν οι πλευρές του;

Άσκηση 11.4 Υπολογίστε την υπερβολική απόσταση $d(z, w)$ μεταξύ των σημείων

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & z = i, w = \frac{i}{r} \\ \beta'. & z = 3 + 2i, w = 3 + \frac{i}{2} \\ \gamma'. & z = 3 + 4i, w = -3 + 4i. \end{array}$$

Άσκηση 11.5 Θεωρήστε το σύνολο $K = \{w \in \mathcal{H} : w = t + it, t > 0\}$ και το σημείο $z = x + iy$. Βρείτε την απόσταση από το σημείο z στο σύνολο K ,

$$d(z, K) = \inf\{d(z, w) : w \in K\}.$$

Βρείτε το πλησιέστερο προς το z σημείο του K και περιγράψτε το γεωμετρικά.

Άσκηση 11.6 Αποδείξτε τις υπερβολικές ταυτότητες

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \\ \beta'. & \cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t \\ \gamma'. & \cosh \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t + 1}{2}} \\ \delta'. & \sinh \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t - 1}{2}} \end{array}$$

Άσκηση 11.7 Θεωρήστε τα σημεία $z = ri$, $w_0 = ti$ και $w_1 = s + ti$. Δείξτε ότι

$$d(z, w_1) \geq d(z, w_0)$$

με ισότητα μόνον όταν $s = 0$.

Άσκηση 11.8 Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: εάν $z, u, w \in \mathcal{H}$,

$$d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w),$$

με ισότητα μόνον όταν το u βρίσκεται μεταξύ των z και w .