ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Φυλλάδιο Προβλημάτων 12

Άσκηση 12.1 Βρείτε την υπερβολική απόσταση που αντιστοιχεί σε γωνία παραλληλισμού $\pi/6$. (Υπολογιστικά φύλλα, όπως το Libre Office ή το Excel υπολογίζουν τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους, π.χ. COSH, ACOSH.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\cosh b = 1/\sin\alpha$. $\sin(\pi/6) = 1/2$. Άρα $\cosh b = 2$ και $b = 1,317$.

Άσκηση 12.2 Βρείτε τα μήκη των πλευρών ένος υπερβολικού τριγώνου με γωνίες $\pi/2$, $\pi/4$ και $\pi/6$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$ και $\gamma = \pi/6$.
Από Κανόνα Συνημιτόνου ΙΙ, $\cosh b = \sqrt{2}$, $b = 0,881$.
$\cosh c = \sqrt{3/2}$, $c = 0,658$.
Από Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα, $\cosh a = \sqrt{3}$, $a = 1,146$.

Άσκηση 12.3 Δείξτε οτι ένα ισοσκελές υπερβολικό τρίγωνο, με $d(A, B) = d(A, C)$) έχει τις γωνίες της βάσης ίσες, $\beta = \gamma$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Χρησιμοποιήστε τον Κανόνα Ημιτόνου.

Άσκηση 12.4 Για κάθε $\vartheta \in [0, \pi/3)$ κατασκευάστε ένα ισόπλευρο υπερβολικό τρίγωνο με γωνίες ϑ. (Βρείτε τις κορυφές ενός τέτοιου τριγώνου που βρίσκονται πάνω σε τρεις υ-ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες $\pi/3$).
Βρείτε το μήκος της πλευράς του τριγώνου συναρτήσει της γωνίας ϑ.
Βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου συναρτήσει της γωνίας ϑ.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{z+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}z+1}$, που είναι περιστροφή κατά $2\pi/3$ γύρω από το σημείο i, απεικονίζει την υ-ημιευθεία $[\mathrm{i}, \infty)$ στην υ-ημιευθεία $[\mathrm{i}, -\sqrt{3}/3)$. Ο f^{-1} απεικονίζει την υ-ημιευθεία $[\mathrm{i}, \infty)$ στην υ-ημιευθεία $[\mathrm{i}, \sqrt{3}/3)$.

Θεωρούμε τα σημεία πάνω στις ημιευθείες $[\mathrm{i}, \infty)$, $[\mathrm{i}, -\sqrt{3}/3)$ και $[\mathrm{i}, \sqrt{3}/3)$ που απέχουν $r = \log k$ από το σημείο i. Αυτά είναι τα $A = k\mathrm{i}$, $B = \frac{k\mathrm{i}+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}k\mathrm{i}+1}$ και $C = \frac{k\mathrm{i}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}k\mathrm{i}+1}$. Οι πλευρές του τριγώνου ABC είναι ίσες, αφού η περιστροφή γύρω από το i κατά γωνία $2\pi/3$, που διατηρεί τις αποστάσεις, απεικονίζει τα A, B, C στα B, C, A αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου με γωνία ϑ από τον Κανόνα Συνημιτόνου ΙΙ: $\cosh c = \frac{\cos^2\vartheta+\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$. Αφού $\cosh c > 1$, πρέπει να ισχύει $\cos\vartheta > 1/2$, και συνεπώς $\vartheta < \pi/3$.

Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $r = \log k$, και την υπολογίζουμε από τον Κανόνα Συνημιτόνου ΙΙ στο ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες $\vartheta/2$, $\vartheta/2$, $2\pi/3$: $\cosh r = 1/(2\tan(\vartheta/2))$.

Άσκηση 12.5 Βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα κανονικό ορθογώνιο εξάγωνο. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 12.2.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το κανονικό ορθογώνιο εξάγωνο χωρίζεται σε 12 ίσα τρίγωνα με γωνίες $\pi/2$, $\pi/4$ και $\pi/6$. Υπολογίσαμε τα μήκη των πλευρών αυτού του τριγώνου στην Άσκηση 12.2. Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι η υποτείνουσα αυτού του τριγώνου, $r = 1,146$, και η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου $\rho = 0,881$.

Άσκηση 12.6 Θεωρήστε υπερβολικό τετράπλευρο $ABCD$ με τρεις ορθές γωνίες στις κορυφές A, B, C και $d(A,B) = d(B,C) = t$. Δείξτε οτι $d(A,D) = d(C,D)$. Βρείτε τη σχέση μεταξύ του μήκους t και της γωνίας $\delta = \angle ADC$. Υπολογίστε το μήκος $d(A,D)$ συναρτήσει του t.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Έστω E και F τα σημεία τομής της AD και CD, αντίστοιχα, με τη διχοτόμο της γωνίας $\angle ABC$. Τότε από τον κανόνα του Συνημιτόνου ΙΙ στα τρίγωνα ABE και CBF, $d(B,E) = d(B,F)$ και συνεπώς $E = F = D$. Άρα $d(A,D) = d(C,D)$.
Βρίσκουμε $\cos(\delta/2) = \frac{\cosh t}{\sqrt{2}}$ και $\cosh d(A,D) = \frac{1}{\sqrt{2-\cosh^2 t}}$.