ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Άσκηση 2.1 Γράψτε ένα παράδειγμα (εάν υπάρχει) για τα παρακάτω είδη μετασχηματισμών $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α΄. έναν ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό που δεν είναι ευκλείδειος μετασχηματισμός,

β΄. έναν ευκλείδειο μετασχηματισμό που δεν είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός,

γ΄. ένα μετασχηματισμό που είναι ευκλείδειος και ομοπαραλληλικός,

δ΄. ένα μονότιμο (1-1) μετασχηματισμό που δεν είναι ούτε ευκλείδειος ούτε ομοπαραλληλικός.

Απάντηση - Υπόδειξη.
δ΄) Ένας τέτοιος μετασχηματισμός πρέπει να περιέχει μη γραμμικούς όρους. Ένα παράδειγμα είναι ο $(x, y) \longmapsto (x^3, y)$.

Άσκηση 2.2 Για τους ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς

$$t_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad t_2(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

προσδιορίστε τις συνθέσεις $t_1 \circ t_2$, $t_2 \circ t_1$ και $t_1 \circ t_1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$t_1 \circ t_2(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.3 Βρείτε το αντίστροφο των μετασχηματισμών

$$\text{α΄) } t(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \text{β΄) } t(x, y) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄)

$$t^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-2 \\ y-4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.4 Για τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό

$$t(x,\, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

βρείτε την εικόνα των ευθειών

$$\alpha')\ y = -2x \quad \text{και} \quad \beta')\ 2y = 3x - 1\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′) Η εικόνα της ευθείας $y = -2x$ από το μετασχηματισμό t αποτελείται από τα σημεία με συντεταγμένες $(x',\, y')$ τέτοιες ώστε $(x',\, y') = t(x,\, y)$ και $(x,\, y)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = -2x$. Εκφραζουμε τα $(x',\, y')$ συναρτήσει των $(x,\, y)$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση $y = -2x$.

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό t^{-1}, και βρίσκουμε $(x,\, y) = (3x' - y' - 10,\, 2x' - y' - 8)$. Αντικαθιστώντας έχουμε $2x' - y' - 8 = -2(3x' - y' - 10)$. Άρα η εικόνα της ευθείας $y = -2x$ είναι η ευθεία με εξίσωση

$$8x - 3y = 28\,.$$

Άσκηση 2.5 Βρείτε τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία $(0,\, 0)$, $(1,\, 0)$ και $(0,\, 1)$ στα

α′. $(0,\, -1)$, $(1,\, 1)$ και $(1,\, -1)$ αντίστοιχα,

β′. $(-4,\, -5)$, $(1,\, 7)$ και $(2,\, 9)$ αντίστοιχα.

Βρείτε και τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία $(0,\, -1)$, $(1,\, 1)$ και $(1,\, -1)$ στα σημεία $(-4,\, -5)$, $(1,\, 7)$ και $(2,\, 9)$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′)

$$t(x,\, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.6 Βρείτε τους 2×2 και 2×1 πίνακες A και b, για τους οποίους ο μετασχηματισμός $t(x) = Ax + b$ απεικονίζει κάθε σημείο της ευθείας $y = 0$ στον εαυτό του και το σημείο $(0,\, 1)$ στο σημείο $(2,\, 3)$. Δείξτε επίσης οτι ο t είναι παράλληλη προβολή.