

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Άσκηση 2.1 Γράψτε ένα παράδειγμα (εάν υπάρχει) για τα παρακάτω είδη μετασχηματισμών $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

- α'. έναν ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό που δεν είναι ευκλείδειος μετασχηματισμός,
- β'. έναν ευκλείδειο μετασχηματισμό που δεν είναι ομοπαράλληλικός μετασχηματισμός,
- γ'. ένα μετασχηματισμό που είναι ευκλείδειος και ομοπαράλληλικός,
- δ'. ένα μονότιμο (1-1) μετασχηματισμό που δεν είναι ούτε ευκλείδειος ούτε ομοπαράλληλικός.

Άσκηση 2.2 Για τους ομοπαράλληλικούς μετασχηματισμούς

$$t_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad t_2(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

προσδιορίστε τις συνθέσεις $t_1 \circ t_2$, $t_2 \circ t_1$ και $t_1 \circ t_1$.

Άσκηση 2.3 Βρείτε το αντίστροφο των μετασχηματισμών

$$\alpha') \quad t(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \beta') \quad t(x, y) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.4 Για τον ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

βρείτε την εικόνα των ευθειών

$$\alpha') \quad y = -2x \quad \text{και} \quad \beta') \quad 2y = 3x - 1.$$

Άσκηση 2.5 Βρείτε τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα

α'. $(0, -1)$, $(1, 1)$ και $(1, -1)$ αντίστοιχα,

β'. $(-4, -5)$, $(1, 7)$ και $(2, 9)$ αντίστοιχα.

Βρείτε και τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία $(0, -1)$, $(1, 1)$ και $(1, -1)$ στα σημεία $(-4, -5)$, $(1, 7)$ και $(2, 9)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 2.6 Βρείτε τους 2×2 και 2×1 πίνακες A και b , για τους οποίους ο μετασχηματισμός $t(x) = Ax + b$ απεικονίζει κάθε σημείο της ευθείας $y = 0$ στον εαυτό του και το σημείο $(0, 1)$ στο σημείο $(2, 3)$. Δείξτε επίσης ότι ο t είναι παράλληλη προβολή.