ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Υπόδειγμα Θεμάτων
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Παρατηρήσεις

1. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ να έχετε ΚΙΝΗΤΑ ή ΚΟΜΠΙΟΥΤΕΡΑΚΙΑ στο χώρο της εξέτασης.
2. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες. Προσέξτε να χρησιμοποιείτε ορθά τα μαθηματικά σύμβολα και τη μαθηματική ορολογία.
3. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε και να επιδείξετε πάσο ή ταυτότητα.
5. Η εξέταση διαρκεί 2 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ σε όλη τη διάρκεια της εξέτασης. Την πρώτη μισή ώρα απαγορεύεται η αποχώρηση από την εξέταση.
6. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

ΘΕΜΑ Α.

1. (15) Δίδεται η ευθεία ε με εξίσωση $2x - 3y + 5 = 0$, η κωνική καμπύλη c με εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ και ο ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός

$$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

α′. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $t(\varepsilon)$.

β′. Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης $t(c)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η ευθεία $t(\varepsilon)$ αποτελείται από τα σημεία (x', y') για τα οποία τα σημεία $(x, y) = t^{-1}(x', y;)$ ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας ε.

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} t^{-1}(x', y') &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \\ &= (-x' + y' + 2, -2x' + y').\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ευθείας ε για να βρούμε την εξίσωση της $t(\varepsilon)$: $2(-x'+y'+2)-3(-2x'+y')+5=0$, δηλαδή

$$t(\varepsilon) : 4x - y + 9 = 0\,.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του κύκλου c για να βρούμε την εξίσωση του σχήματος $t(c)$: $4(-x'+y'+2)^2+(-2x'+y')^2-4=0$, δηλαδή

$$t(c) : 2x^2 + \frac{5}{4}y^2 - 3xy - 4x + 4y + 3 = 0\,.$$

2. (20) Δίδεται τρίγωνο ABC και σημείο X τέτοιο ώστε AX τέμνει την BC στο P, BX τέμνει την CA στο Q και CX τέμνει την AB στο R.

α′. Εάν $\frac{AB}{BR}=\frac{2}{1}$ και $\frac{AC}{CQ}=\frac{1}{1}$, βρείτε το λόγο $\frac{(BC)}{(CP)}$.

β′. Εάν οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου είναι $A:(1,2)$, $B:(0,0)$ και $C:(3,0)$, βρείτε τις συντεταγμένες του X.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Από τα δεδομένα, $\frac{(AR)}{(RB)}=-3$ και $\frac{(CQ)}{(QA)}=-\frac{1}{2}$. Από το Θεώρημα Ceva, $\frac{(AR)}{(RB)}\frac{(BP)}{(PC)}\frac{(CQ)}{(QA)}=1$. Άρα $\frac{(BP)}{(PC)}=\frac{2}{3}$, και συνεπώς $\frac{(BC)}{(CP)}=-\frac{5}{3}$.

Εάν $R:(r_1,r_2)$, αφού $\frac{(AR)}{(RB)}=-3$, $r_1-1=-3(r_1-0)$ και $r_2-2=-3(r_2-0)$, δηλαδή $(r_1,r_2)=(-1/2,-1)$. Παρόμοια, $Q:(5,-2)$. Άρα οι ευθείες CR και BQ έχουν εξισώσεις $7y=2(x-3)$ και $5y=-2x$, αντίστοιχα. Το σημείο τομής τους είναι $X:(5/4,-1/2)$.

ΘΕΜΑ Β.
1. (15) Βρείτε την εξίσωση της προβολικής ευθείας ε που περνάει από τα σημεία με ομογενείς συντεταγμένες $A:[3,1,3]$ και $B:[0,5,1]$.
Βρείτε έναν προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει την προβολική ευθεία ε στην προβολική ευθεία με εξίσωση $x=0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η εξίσωση της προβολικής ευθείας ε είναι $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$, δηλαδή $-14x-3y+15z=0$.

Εάν P είναι ο πίνακας του ζητούμενου προβολικού μετασχηματισμού, τότε η εικόνα της ευθείας ε από τον μετασχηματισμό έχει εξίσωση

$$[\,-14 \quad -3 \quad 15\,]P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0\,.$$

Άρα πρέπει να βρούμε ένα πίνακα P τέτοιο ώστε

$$[\,-14 \quad -3 \quad 15\,]P^{-1}=[\,\lambda \quad 0 \quad 0\,]\,.$$

Παρατηρούμε οτι έχουμε 9 αγνώστους, αλλά μόνο δύο συνθήκες, συνεπώς πολλές ελεύθερες μεταβλητές. Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις στη συνέχεια, είναι προτιμότερο ο πίνακας P^{-1} να περιέχει πολλά 0 ή 1.

Αναζητούμε πίνακα στη μορφή $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, τέτοιο ώστε

$$[\,-14 \quad -3 \quad 15\,] \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,\lambda \quad 0 \quad 0\,].$$

Έτσι, για $\lambda = -14$, έχουμε $b = -3/14$ και $c = 15/14$, άρα

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/14 & 15/14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός έχει πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 1 & +3/14 & -15/14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε πίνακα που να απεικονίζει τα A και B σε δύο σημεία της ευθείας $x = 0$, για παράδειγμα τα $[0, 1, 0]$ και $[0, 0, 1]$.

2. (20) Θεωρήστε τρίγωνο ABC στο $\mathbb{R}^2$, και σημείο $U \in \mathbb{R}^2$ που δεν είναι συγγραμμικό με δύο από τα σημεία A, B, C. Οι ευθείες AU, BU, CU τέμνουν τις ευθείες BC, CA, BA στα σημεία P, Q, R αντίστοιχα. Δείξτε οτι τα σημεία P, Q, R δεν μπορεί να είναι συγγραμμικά.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία A, B, C στα σημεία με ομογενείς συντεταγμένες $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ και $[0, 0, 1]$ αντίστοιχα, και το σημείο U στο σημείο με ομογενείς συντεταγμένες $[1, 1, 1]$. Τότε η ευθεία AB απεικονίζεται στην ευθεία με εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, δηλαδή $z = 0$. Η ευθεία UC απεικονίζεται στην ευθεία με εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, δηλαδή $x = y$. Συνεπώς το σημείο R απεικονίζεται στο σημείο με ομογενείς συντεταγμένες $[1, 1, 0]$.

Παρόμοια, τα σημεία P και Q απεικονίζονται στα σημεία με ομογενείς συντεταγμένες $[0, 1, 1]$ και $[1, 0, 1]$ αντίστοιχα.

Ελέγχουμε οτι τα σημεία $[1, 1, 0]$, $[0, 1, 1]$ και $[1, 0, 1]$ δεν είναι συγγραμμικά:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,.$$

Αφού οι προβολικοί μετασχηματισμοί διατηρούν την ιδιότητα της συγγραμμικότητας, τα σημεία P, Q και R δεν μπορεί να είναι συγγραμμικά.

ΘΕΜΑ Γ.

1. (20) Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1,\ 2,\ -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $0,\ 1,\ \infty \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.
Είναι ο μετασχηματισμός που βρήκατε ελλειπτικός, παραβολικός ή υπερβολικός;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θέλουμε να βρούμε μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, τέτοιο ώστε $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f(-3) = \infty$. Άρα οι συντελεστές a, b, c, d πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες $a + b = 0$, $-3c + d = 0$ και $2a + b = 2c + d$. Θέτουμε $c = 1$ και έχουμε $d = 3$, $a = 5$ και $b = -5$. Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$f(z) = \frac{5z-5}{z+3}\,.$$

Εναλλακτικά μπορείτε να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, που απεικονίζει τα $0,\ 1,\ \infty$ στα $1,\ 2,\ -3$. Αυτός είναι ο $f^{-1}(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$, με $q/s = 1$, $p/r = -3$ και $(p+q)/(r+s) = 1$. Θέτουμε $r = 1$ και βρίσκουμε $p = -3$, $s = -5$, $q = -5$. Άρα $f^{-1}(z) = \frac{-3z-5}{z-5}$, του οποίου αντίστροφος είναι ο μετασχηματισμός $\frac{-z+5}{-z-3}$ που είναι ίσος με τον $f(z) = \frac{5z-5}{z+3}$.

Για να βρούμε τον τύπο του μετασχηματισμού Möbius υπολογίζουμε την παράμετρο $\tau = \frac{(a+d)^2}{ad-bc}$. Βρίσκουμε $\tau = 64/20 = 16/5$. Αφού $\tau < 4$ ο μετασχηματισμός f είναι ελλειπτικός.

2. (25) Βρείτε το μήκος της πλευράς ενός ισοπλεύρου υπερβολικού τριγώνου όταν η γωνία του είναι $\vartheta < \pi/3$.
Βρείτε το ύψος του ισοπλεύρου υπερβολικού τριγώνου με γωνία ϑ. (Το ύψος είναι η απόσταση μίας κορυφής από την απέναντι πλευρά.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ένα υπερβολικό ισόπλευρο τρίγωνο ABC έχει τρεις ίσες γωνίες, $\alpha = \beta = \gamma = \theta$, και τρεις ίσες πλευρές, $c = a = b$. Από τον Κανόνα Συνημιτόνου II,

$$\begin{aligned}
\cosh c &= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\cos^2\vartheta + \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \\
&= \frac{\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}\,.
\end{aligned}$$

Το ύψος του τριγώνου ABC είναι η απόσταση της κορυφής A από την πλευρά BC. Από συμμετρία, η κάθετος από την A στην BC διχοτομεί την πλευρά BC, αλλά και τη γωνία α. Άρα το ύψος h είναι το μήκος μίας πλευράς του τριγώνου με γωνίες $\pi/2$, $\vartheta/2$ και ϑ (και αντίστοιχες πλευρές c, $c/2$ και h). Από τον Κανόνα του Συνημιτόνου II,

$$\begin{aligned}
\cosh h &= \frac{\cos(\pi/2)\cos(\theta/2) + \cos\theta}{\sin(\pi/2)\sin(\theta/2)} \\
&= \frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta/2)}\,.
\end{aligned}$$