

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Παρατηρήσεις

1. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ να έχετε ΚΙΝΗΤΑ ή ΚΟΜΠΙΟΥΤΕΡΑΚΙΑ στο χώρο της εξέτασης.
2. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες. Προσέξτε να χρησιμοποιείτε ορθά τα μαθηματικά σύμβολα και τη μαθηματική ορολογία.
3. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε και να επιδείξετε πάσο ή ταυτότητα.
5. Η εξέταση διαρκεί 2 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ σε όλη τη διάρκεια της εξέτασης. Την πρώτη μισή ώρα απαγορεύεται η αποχώρηση από την εξέταση.
6. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

ΘΕΜΑ Α.

1. (15) Δίδεται η ευθεία ε με εξίσωση $2x - 3y + 5 = 0$, η κωνική καμπύλη c με εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ και ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός

$$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

α'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $t(\varepsilon)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης $t(c)$.

2. (20) Δίδεται τρίγωνο ABC και σημείο X τέτοιο ώστε AX τέμνει την BC στο P , BX τέμνει την CA στο Q και CX τέμνει την AB στο R .

α'. Εάν $\frac{AB}{BR} = \frac{2}{1}$ και $\frac{AC}{CQ} = \frac{1}{1}$, βρείτε το λόγο $\frac{BC}{CP}$.

β'. Εάν οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου είναι $A : (1, 2)$, $B : (0, 0)$ και $C : (3, 0)$, βρείτε τις συντεταγμένες του X .

ΘΕΜΑ Β.

1. (15) Βρείτε την εξίσωση της προβολικής ευθείας ε που περνάει από τα σημεία με ομογενείς συντεταγμένες $A : [3, 1, 3]$ και $B : [0, 5, 1]$.

Βρείτε έναν προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει την προβολική ευθεία ε στην προβολική ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

2. (20) Θεωρήστε τρίγωνο ABC στο $\mathbb{R}^2$, και σημείο $U \in \mathbb{R}^2$ που δεν είναι συγγραμμικό με δύο από τα σημεία A, B, C . Οι ευθείες AU, BU, CU τέμνουν τις ευθείες BC, CA, BA στα σημεία P, Q, R αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα σημεία P, Q, R δεν μπορεί να είναι συγγραμμικά.

ΘΕΜΑ Γ.

1. (20) Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $0, 1, \infty \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Είναι ο μετασχηματισμός που βρήκατε ελλειπτικός, παραβολικός ή υπερβολικός;

2. (25) Βρείτε το μήκος της πλευράς ενός ισοπλεύρου υπερβολικού τριγώνου όταν η γωνία του είναι $\vartheta < \pi/3$.

Βρείτε το ύψος του ισοπλεύρου υπερβολικού τριγώνου με γωνία ϑ . (Το ύψος είναι η απόσταση μίας κορυφής από την απέναντι πλευρά.)