

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Άσκηση 4.1 Οι εφαπτόμενες σε μία έλλειψη στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο T . Δείξτε ότι η ευθεία που συνδέει το T με το κέντρο O της έλλειψης διχοτομεί τη χορδή AB .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Χρησιμοποιήστε έναν ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό t που απεικονίζει την έλλειψη σε κύκλο.

Άσκηση 4.2 Μία έλλειψη εφάπτεται στις πλευρές AB , BC , CD , DA ενός παραλληλογράμμου $ABCD$ στα σημεία P , Q , R , S αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα μήκη CQ , QB , BP και CR ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{CR}{BP}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα ότι ένας ομοπαράλληλικός μετασχηματισμός που απεικονίζει την έλλειψη σε κύκλο, απεικονίζει παράλληλες εφαπτόμενες σε παράλληλες εφαπτόμενες, και διατηρεί το λόγο των μηκών πάνω σε παράλληλες ευθείες.

Άσκηση 4.3 Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της παραβολής C με εξίσωση $y = x^2$ από τον ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι η εικόνα της κορυφής της C δεν είναι η κορυφή της παραβολής $t(C)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Έχουμε $t(x, y) = (x, -2x + x^2)$. Άρα η εξίσωση της εικόνας $t(C)$ είναι $y = x^2 - 2x$. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο βρίσκουμε την κορυφή αυτής της παραβολής.

Άσκηση 4.4 Δείξτε ότι για κάθε τρίγωνο ABC υπάρχει μία έλλειψη που εφάπτεται στα μέσα των πλευρών του τριγώνου.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Χρησιμοποιήστε ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό που να απεικονίζει το δοθέν τρίγωνο σε ισόπλευρο τρίγωνο. Τότε ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στα μέσα των πλευρών.

Άσκηση 4.5 Θεωρήστε $\vartheta \neq \frac{k\pi}{2}$ και τα σημεία $P : (a \cos \vartheta, b \sin \vartheta)$ στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ για } a \geq b > 0$$

και $P' : (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta)$ στον κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$. Δείξτε ότι η εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο P και η εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο P' τέμνονται πάνω στον x -άξονα. Υπόδειξη: Βρείτε ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό που να απεικονίζει την έλλειψη στον κύκλο, το P στο P' και να αφήνει σταθερά όλα τα σημεία του x -άξονα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Βρείτε τον ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το P στο P' και αφήνει σταθερά $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ (συνεπώς μένουν σταθερά όλα τα σημεία του x -άξονα). Κατόπιν ελέγξτε ότι αυτός ο μετασχηματισμός απεικονίζει την έλλειψη στον κύκλο.

Άσκηση 4.6 Εάν P και P' είναι σημεία σε ελλείψεις E και E' αντίστοιχα, δείξτε ότι υπάρχει ομοπαράλληλικός μετασχηματισμός που να απεικονίζει την E στην E' και το P στο P' .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Χρησιμοποιήστε σύνθεση μετασχηματισμών που απεικονίζουν την έλλειψη E και την E' στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ (ή των αντιστρόφων τους), και κατάλληλης περιστροφής στον κύκλο.

Άσκηση 4.7 Βρείτε τα άκρα της χορδής AB της υπερβολής με εξίσωση $xy = 1$ η οποία διχοτομείται από το σημείο $P : (2, 1)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ένας ομοπαράλληλικός μετασχηματισμός της μορφής $(x, y) \mapsto (ax, y/a)$ απεικονίζει την υπερβολή $xy = 1$ στον εαυτό της. Για $a = 1/\sqrt{2}$, απεικονίζει το σημείο $(2, 1)$ στο $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Από συμμετρία, το σημείο $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ διχοτομεί τη χορδή της υπερβολής που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x + y = 2\sqrt{2}$.

Απομένει να βρούμε τα άκρα αυτής της χορδής, και να πάμε πίσω στη χορδή από το $(2, 1)$. Τα άκρα της χορδής ικανοποιούν τις εξισώσεις $x + y = 2\sqrt{2}$ και $xy = 1$. Αυτό το σύστημα έχει λύσεις $(x, y) = (\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$ και $(x, y) = (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$.

Πάμε πίσω στη χορδή από το $(2, 1)$ εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό, $(x, y) \mapsto (\sqrt{2}x, y/\sqrt{2})$, και έχουμε

$$(x, y) = (2 + \sqrt{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ και } (x, y) = (2 - \sqrt{2}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}).$$