

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Άσκηση 4.1 Οι εφαπτόμενες σε μία έλλειψη στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο T . Δείξτε ότι η ευθεία που συνδέει το T με το κέντρο O της έλλειψης διχοτομεί τη χορδή AB .

Άσκηση 4.2 Μία έλλειψη εφάπτεται στις πλευρές AB , BC , CD , DA ενός παραλληλογράμμου $ABCD$ στα σημεία P , Q , R , S αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα μήκη CQ , QB , BP και CR ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{CR}{BP}.$$

Άσκηση 4.3 Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της παραβολής C με εξίσωση $y = x^2$ από τον ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό

$$t(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι η εικόνα της κορυφής της C δεν είναι η κορυφή της παραβολής $t(C)$.

Άσκηση 4.4 Δείξτε ότι για κάθε τρίγωνο ABC υπάρχει μία έλλειψη που εφάπτεται στα μέσα των πλευρών του τριγώνου.

Άσκηση 4.5 Θεωρήστε $\vartheta \neq \frac{k\pi}{2}$ και τα σημεία $P : (a \cos \vartheta, b \sin \vartheta)$ στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ για } a \geq b > 0$$

και $P' : (a \cos \vartheta, a \sin \vartheta)$ στον κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$. Δείξτε ότι η εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο P και η εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο P' τέμνονται πάνω στον x -άξονα. Υπόδειξη: Βρείτε ομοπαράλληλικό μετασχηματισμό που να απεικονίζει την έλλειψη στον κύκλο, το P στο P' και να αφήνει σταθερά όλα τα σημεία του x -άξονα.

Άσκηση 4.6 Εάν P και P' είναι σημεία σε ελλείψεις E και E' αντίστοιχα, δείξτε ότι υπάρχει ομοπαράλληλικός μετασχηματισμός που να απεικονίζει την E στην E' και το P στο P' .

Άσκηση 4.7 Βρείτε τα άκρα της χορδής AB της υπερβολής με εξίσωση $xy = 1$ η οποία διχοτομείται από το σημείο $P : (2, 1)$.