

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Άσκηση 5.1 Ποιές από τις ακόλουθες ομογενείς συντεταγμένες παριστάνουν το ίδιο σημείο στο $\mathbb{RP}^2$ με τις $[1, 2, 3]$;

$$\alpha') [2, 4, 6] \quad \beta') [1, 2, -3] \quad \gamma') [-1, -2, -3] \quad \delta') [11, 12, 13].$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
 $[2, 4, 6]$ και $[-1, -2, -3]$.

Άσκηση 5.2 Για τα σημεία με τις ακόλουθες ομογενείς συντεταγμένες βρείτε ακέραιες ομογενείς συντεταγμένες που παριστάνουν το ίδιο σημείο στο $\mathbb{RP}^2$.

$$\alpha') \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6} \right] \quad \beta') \left[\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right] \quad \gamma') \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right].$$

Για τα ίδια σημεία βρείτε ομογενείς συντεταγμένες με μία από τις συντεταγμένες ίση με 1.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha') [8, 9, 2] \text{ και } [4, 9/2, 1] \quad \gamma') [2, 3, 0] \text{ και } [1, 3/2, 0].$$

Άσκηση 5.3 Βρείτε την εξίσωση της προβολικής ευθείας που περνάει από τα προβολικά σημεία

$$\alpha') [0, 1, 0] \text{ και } [0, 0, 1] \quad \beta') [2, 2, 3] \text{ και } [3, 3, 7].$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\alpha')$ Το επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που περιέχει τις ευθείες $\{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ και $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ είναι το επίπεδο $\{x = 0\}$.

Άσκηση 5.4 Βρείτε την εξίσωση της προβολικής ευθείας που περνάει από τα προβολικά σημεία

$$\alpha') [2, 5, 4] \text{ και } [3, 1, 7] \quad \beta') [-2, -4, 5] \text{ και } [3, -2, -4].$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α') Η εξίσωση της ευθείας είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Άσκηση 5.5 Ελέγξτε εάν οι ακόλουθες τριάδες προβολικών σημείων βρίσκονται στην ίδια προβολική ευθεία

α'. $[1, 2, 3]$, $[1, 1, -2]$ και $[2, 1, -9]$,

β'. $[1, 2, -1]$, $[2, 1, 0]$ και $[0, -1, 3]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α') Τα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία, αφού

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Άσκηση 5.6 Επαληθεύστε ότι από τα σημεία του τριγώνου αναφοράς $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ και $[0, 0, 1]$, και το μοναδιαίο σημείο $[1, 1, 1]$ δεν υπάρχουν τρία που να βρίσκονται στην ίδια προβολική ευθεία.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Οι τέσσερις διαφορετικές ορίζουσες είναι όλες $= \pm 1$, άρα κάθε τρία σημεία δεν είναι συγγραμμικά.

Άσκηση 5.7 Βρείτε το σημείο τομής των ακόλουθων προβολικών ευθειών

α'. $x - y - z = 0$ και $x + 5y + 2z = 0$,

β'. $x + 2y - z = 0$ και $2x + y - 4z = 0$,

γ'. η προβολική ευθεία που περνάει από τα σημεία $[8, -1, 2]$ και $[1, -2, -1]$, και η προβολική ευθεία που περνάει από τα σημεία $[0, 1, -1]$ και $[2, 3, 1]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

γ') Οι προβολικές ευθείες έχουν εξισώσεις $5x + 10y - 15z = 0$ και $4z - 2y - 2z = 0$. Το σύνολο λύσεων αυτών των εξισώσεων παράγεται από το διάνυσμα $(1, 1, 1)$. Άρα το σημείο τομής έχει ομογενείς συντεταγμένες $[1, 1, 1]$.

Άσκηση 5.8 Ποιό σημείο του επιπέδου εμφύτευσης $\pi : y = -1$ αντιστοιχεί στο προβολικό σημείο με ομογενείς συντεταγμένες $[2, 4, 6]$; Περιγράψτε το ιδεατό σημείο του π που αντιστοιχεί στο προβολικό σημείο $[2, 0, 1]$. Βρείτε άλλο ένα προβολικό σημείο που αντιστοιχεί σε ιδεατό σημείο του π .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το σημείο του π που αντιστοιχεί στο προβολικό σημείο με ομογενείς συντεταγμένες $[2, 4, 6]$ είναι το $(-1/2, -1, -3/2)$. Το ιδεατό σημείο του π που αντιστοιχεί στο προβολικό σημείο με ομογενείς συντεταγμένες $[2, 0, 1]$ είναι η ευθεία με παραμετρική παράσταση $(x, y, z) = (2t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$ ή με εξισώσεις $x - 2z = 0$, $y = 0$ (η οποία είναι παράλληλη στο επίπεδο π).