

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Άσκηση 6.1 Ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι προβολικοί μετασχηματισμοί;

α'. $t : [x, y, z] \mapsto [-2x + 3z, -x + 5y - z, -3x],$

β'. $t : [x, y, z] \mapsto [x - 1 + z, 2y - 4z, -3x],$

γ'. $t : [x, y, z] \mapsto [x - 7y + 4z, -x + 5y - z, x - 9y + 7z].$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ελέγχουμε εάν είναι αντιστρέψιμοι γραμμικοί μετασχηματισμοί το $\mathbb{R}^3$. Η (α') είναι. Η (β') έχει σταθερό όρο, άρα δεν είναι γραμμική απεικόνιση.

Άσκηση 6.2 Για τους προβολικούς μετασχηματισμούς

$$t_1 : [x, y, z] \mapsto [2x + y, -x + z, y + z] \quad \text{και} \quad t_2 : [x, y, z] \mapsto [5x + 8y, 3x + 5y, 2z]$$

βρείτε τους προβολικούς μετασχηματισμούς $t_1 \circ t_2$ και t_1^{-1} .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο μετασχηματισμός t_1 αντιστοιχεί στον πίνακα $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα ο t^{-1} αντιστοιχεί στον πίνακα A^{-1} (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το $\text{adj } A$, αλλά σε αυτή την περίπτωση είναι το ίδιο).

Άσκηση 6.3 Βρείτε τις εικόνες των σημείων $[1, 2, 3]$, $[0, 1, 0]$ και $[1, -1, 1]$ από τον προβολικό μετασχηματισμό που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.4 Βρείτε την εικόνα της προβολικής ευθείας $\varepsilon : x + 2y + 3z = 0$ από τον προβολικό μετασχηματισμό $[x, y, z] \mapsto [2x + y, -x + z, y + z]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εξίσωση της ευθείας ε είναι $[1, 2, 3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$. Η απεικόνιση στέλνει το $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ στο

$A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Εάν το $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ βρίσκεται στην ευθεία, τότε $A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ικανοποιεί την εξίσωση $[1, 2, 3]A_1^{-1} \left(A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = 0$. Άρα η $t_1(\varepsilon)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $[1, 2, 3]A_1^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$, δηλαδή $2x + 3y = 0$.

Άσκηση 6.5 Βρείτε τον προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα προβολικά σημεία $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$ στα προβολικά σημεία

α'. $[-1, 0, 0]$, $[-3, 2, 0]$, $[2, 0, 4]$ και $[1, 2, -5]$ αντίστοιχα,

β'. $[1, 0, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$ και $[3, 4, 5]$ αντίστοιχα,

γ'. $[2, 1, 0]$, $[1, 0, -1]$, $[0, 3, -1]$ και $[3, -1, 2]$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο προβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα προβολικά σημεία $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$ στα προβολικά σημεία $[a, b, c]$, $[d, e, f]$, $[g, h, k]$ και $[l, m, n]$ αντίστοιχα, έχει πίνακα πολλαπλάσιο του $\begin{bmatrix} \kappa a & \lambda d & \mu g \\ \kappa b & \lambda e & \mu h \\ \kappa c & \lambda f & \mu k \end{bmatrix}$, όπου τα κ, λ, μ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}.$$

α') $(\kappa, \lambda, \mu) = (-13/2, 1, -5/4)$ και ο πίνακας του προβολικού μετασχηματισμού είναι

$$A = \begin{bmatrix} 26 & -12 & -10 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}.$$

γ') $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, -1, -1)$ και ο πίνακας του προβολικού μετασχηματισμού είναι $B =$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.6 Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα της Άσκησης 6.5 για να βρείτε τον προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα προβολικά σημεία $[-1, 0, 0]$, $[-3, 2, 0]$, $[2, 0, 4]$ και $[1, 2, -5]$ στα προβολικά σημεία $[2, 1, 0]$, $[1, 0, -1]$, $[0, 3, -1]$ και $[3, -1, 2]$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο προβολικός μετασχηματισμός έχει πίνακα BA^{-1}

Άσκηση 6.7 Βρείτε τον προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα προβολικά σημεία $[-2, 0, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[-1, 2, -1]$ και $[-1, 1, -1]$ στα προβολικά σημεία $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, -1, 1]$ και $[2, 1, 1]$ αντίστοιχα.

Ένα προβολικό τετράπλευρο είναι ένα σύνολο από τέσσερα προβολικά σημεία A, B, C, D τέτοια ώστε κάθε τρία από αυτά να μην βρίσκονται στην ίδια προβολική ευθεία, μαζί με τις προβολικές ευθείες AB, BC, CD και DA .

Άσκηση 6.8 Εξετάστε εάν οι ακόλουθες τετράδες προβολικών σημείων σχηματίζουν προβολικό τετράπλευρο. Στις περιπτώσεις που σχηματίζουν προβολικό τετράπλευρο, βρείτε τον προβολικό μετασχηματισμό που το απεικονίζει στο κανονικό τετράπλευρο $A_0 = [1, 0, 0]$, $B_0 = [0, 1, 0]$, $C_0 = [0, 0, 1]$ και $D_0 = [1, 1, 1]$.

α'. $A = [0, 0, 1], B = [1, 1, 1], C = [1, 0, 0]$ και $D = [0, 1, 0]$,

β'. $A = [0, 1, -3], B = [1, 1, -1], C = [4, 2, 3]$ και $D = [3, 1, 3]$,

γ'. $A = [0, 1, -3], B = [1, 1, -1], C = [4, 2, 3]$ και $D = [7, 4, 3]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Πρέπει οι τέσσερις ορίζουσες των ομογενών συντεταγμένων των σημείων ανά τρία να μη μηδενίζονται. (β') δεν είναι τετράπλευρο. (γ') είναι τετράπλευρο.

Άσκηση 6.9 Θεωρήστε τρίγωνο ABC στο $\mathbb{R}^2$, και σημείο $U \in \mathbb{R}^2$ που δεν είναι συγγραμμικό με δύο από τα σημεία A, B, C . Οι ευθείες AU, BU, CU τέμνουν τις ευθείες BC, CA, BA στα σημεία A', B', C' αντίστοιχα. Οι ευθείες BC και $B'C'$ τέμνονται στο P , οι CA και $C'A'$ τέμνονται στο Q , οι AB και $A'B'$ τέμνονται στο R . Δείξτε ότι τα σημεία P, Q, R είναι συγγραμμικά.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τα $ABCU$ ως κορυφές του κανονικού τετραπλεύρου $A_0B_0C_0D_0$, και υπολογίστε τις ομογενείς συντεταγμένες των A', B', C' .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Εμφυτεύουμε το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^3$ μέσω της $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$, και θεωρούμε ως επίπεδο εμφύτευσης στο $\mathbb{RP}^2$. Χρησιμοποιώντας έναν προβολικό μετασχηματισμό απεικονίζουμε τα σημεία A, B, C και U στα σημεία του κανονικού τετραπλεύρου $A_0 = [1, 0, 0]$, $B_0 = [0, 1, 0]$, $C_0 = [0, 0, 1]$ και $D_0 = [1, 1, 1]$, αντίστοιχα.

Η προβολική ευθεία AU έχει ομογενή εξίσωση $z - y = 0$, η προβολική ευθεία BC έχει ομογενή εξίσωση $x = 0$ και το σημείο τομής των AU και BC έχει ομογενείς συντεταγμένες $A' : [0, 1, 1]$. Παρόμοια βρίσκουμε $B' : [1, 0, 1]$ και $C' : [1, 1, 0]$.

Η προβολική ευθεία $C'B'$ έχει ομογενή εξίσωση $x - y - z = 0$ και η τομή της με την ευθεία $BC : \{x = 0\}$ είναι το σημείο $P : [0, 1, -1]$. Παρόμοια $Q : [1, 0, -1]$ και $R : [1, -1, 0]$.

Τέλος ελέγχουμε ότι τα P, Q και R είναι συγγραμμικά.