

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

Άσκηση 7.1 Δώστε την ευκλείδεια ερμηνεία του Θεωρήματος Desargues σε ένα επίπεδο εμφύτευσης στο οποίο το Q είναι ιδεατό σημείο.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το σημείο τομής Q των προβολικών ευθειών AC και AC' είναι ιδεατό σημείο, σημαίνει ότι στο επίπεδο εμφύτευσης οι ευκλείδειες ευθείες AC και $A'C'$ είναι παράλληλες. Η ευκλείδεια ερμηνεία του Θεωρήματος Desargues σε αυτή την περίπτωση είναι:

Θεωρούμε ευθείες UA, UB, UC και σημεία A', B', C' , τέτοια ώστε $A'C' \parallel AC$. Εάν οι ευθείες CB και $C'B'$ τέμνονται στο P και οι AB και $A'B'$ τέμνονται στο R , τότε $PR \parallel AC$.

Άσκηση 7.2 Θεωρήστε τρίγωνο ABC στο $\mathbb{R}^2$, και σημείο $U \in \mathbb{R}^2$ που δεν είναι συγγραμμικό με δύο από τα σημεία A, B, C . Οι ευθείες AU, BU, CU τέμνουν τις ευθείες BC, CA, BA στα σημεία P, Q, R αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα σημεία P, Q, R δεν μπορεί να είναι συγγραμμικά.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Θεωρήστε το πρόβλημα μέσα στο προβολικό επίπεδο. Μέσω ενός προβολικού μετασχηματισμού μεταφέρετε τα $ABCU$ στις κορυφές του κανονικού τετραπλεύρου $A_0B_0C_0D_0$, και υπολογίστε τις ομογενείς συντεταγμένες των P, Q, R :

Εάν $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$, $U = [1, 1, 1]$, τότε η προβολική ευθεία AB έχει εξίσωση $z = 0$, η προβολική ευθεία UC έχει εξίσωση $x = y$, και συνεπώς το σημείο R είναι το $[1, 1, 0]$. Παρόμοια, $P = [0, 1, 1]$ και $Q = [1, 0, 1]$. Ελέγξτε ότι αυτά δεν είναι συνευθειακά.

Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Ceva και το θεώρημα Μενελάου, για να καταλήξετε σε άτοπο.

Άσκηση 7.3 Υπολογίστε το διπλό λόγο $(ABCD)$ για τις ακόλουθες τετράδες συγγραμμικών προβολικών σημείων:

α'. $A = [1, -1, -1]$, $B = [1, 3, -2]$, $C = [3, 5, -5]$ και $D = [1, -5, 0]$,

β'. $A = [1, 2, 3]$, $B = [2, 2, 4]$, $C = [-3, -5, -8]$ και $D = [3, -3, 0]$.

Υπολογίστε από τον ορισμό και τους διπλούς λόγους $(BACD)$, $(ACBD)$ για τα σημεία στο (α').

Απάντηση - Υπόδειξη.

α') Εκφράζουμε τις ομογενείς συντεταγμένες των C και D ως γραμμικό συνδυασμό των A

και B :

$$(3, 5, -5) = (1, -1, -1) + 2(1, 3, -2), \quad (1, -5, 0) = 2(1, -1, -1) - 1(1, 3, -2).$$

$$\text{Άρα } (ABCD) = (\beta/\alpha)/(\delta/\gamma) = (2/1)/(-1/2) = -4.$$

$$\text{Παρόμοια, } (BACD) = -1/4 \text{ και } (ACBD) = 5.$$

Άσκηση 7.4 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μετάθεσης για να βρείτε τους διπλούς λόγους $(ABDC)$, $(DBCA)$ και $(ACDB)$ της Άσκησης 7.3(α').

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} = 1/(-4), \quad (DBCA) = 1 - (ABCD) = 5.$$

Άσκηση 7.5 Βρείτε το διπλό λόγο $(ABCD)$ όταν

α'. A, B, C, D βρίσκονται σε αυτή τη διάταξη και $AB = 2, BC = 3$ και $CD = 4$,

β'. A, D, B, C βρίσκονται σε αυτή τη διάταξη και $AD = 6, DB = 2$ και $BC = 3$,

γ'. $AB : BC = 3 : 1$ και D είναι ιδεατό σημείο,

δ'. $AD : DC = 2 : 3$ και B είναι ιδεατό σημείο.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha') (ABCD) = \frac{AC/CB}{AD/DB} = \frac{5/(-3)}{9/(-7)} = \frac{35}{27}.$$

$$\gamma') (ABCD) = -(AC/CB) = -(4/(-1)) = 4.$$

Άσκηση 7.6 Τα σημεία A, B, C, D, E βρίσκονται σε μία ευθεία στο έδαφος, και $BD = 2, CD = 1$. Για τα αντίστοιχα σημεία A', B', C', D', E' σε μία αεροφωτογραφία μετρούμε τις αποστάσεις $A'B' = 4, B'C' = 4, C'D' = 2$ και $D'E' = 1$. Υπολογίστε τις αποστάσεις AD και DE στο έδαφος.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο διπλός λόγος των σημείων στην αεροφωτογραφία είναι $(A'B'C'D') = 6/5$. Ο διπλός λόγος των αντίστοιχων σημείων στο έδαφος είναι

$$(ABCD) = \frac{AC/(-1)}{AD/(-2)} = \frac{2AC}{AD} = \frac{2AC}{AC + 1}.$$

$$\text{Άρα } 2AC = \frac{6}{5}(AC + 1), \text{ και } AC = \frac{3}{2}.$$

Άσκηση 7.7 Παίρνετε μία φωτογραφία στο ηλιοβασίλεμα από την Οία, στην οποία φαίνονται δύο κτίσματα στη Θηρασία (A) και (B) που απέχουν ένα χιλιόμετρο το ένα από το άλλο, ένα πλοίο (C) και ο ήλιος που δύει στον ορίζοντα (D). Στη φωτογραφία τα αντίστοιχα σημεία A', B', C', D' βρίσκονται σε μία ευθεία και οι αποστάσεις μεταξύ τους είναι $A'B' = 1, B'C' = 2, C'D' = 2$. Σε πόση απόσταση από (το κτίσμα B στη) Θηρασία βρίσκεται το πλοίο; (Υποθέστε ότι τα δύο κτίσματα και το πλοίο βρίσκονται περίπου σε ευθεία με τον ήλιο που δύει.)

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το πλοίο βρίσκεται σε απόσταση 5 χιλιομέτρων.

Άσκηση 7.8 Κόψτε έναν δίσκο με διάμετρο τουλάχιστον 30 cm από μία πλαστική σακούλα ή μαλακό ύφασμα. Στο ένα τέταρτο της περιφέρειας του δίσκου σημειώστε τα σημεία A , B , C και στο αντιδιαμετρικό τέταρτο τα αντιδιαμετρικά σημεία A' , B' , C' . Κολλήστε, ή με κάποιο άλλο τρόπο στερεώστε, το σημείο A στο σημείο A' , το σημείο B στο σημείο B' και το σημείο C στο σημείο C' . Μπορείτε να συνεχίσετε και να κολλήσετε το άλλο τέταρτο της περιφέρειας του δίσκου στο αντιδιαμετρικό του; Τι σας εμποδίζει;