

MEM 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

Άσκηση 8.1 Σχεδιάστε τις υ-ευθείες ε_0 , ε_{-2} , $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon_{-3,2}$ και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$.
Ποιές από αυτές είναι παράλληλες; Ποιές είναι υπερπαράλληλες;

Απάντηση - Υπόδειξη.

Παράλληλες οι: ε_0 και ε_{-2} , $\varepsilon_{0,1}$ και $\varepsilon_{-3,2}$, $\varepsilon_{0,1}$ και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$.

Υπερπαράλληλες οι: ε_0 και $\varepsilon_{-3,2}$, ε_0 και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$, ε_{-2} και $\varepsilon_{0,1}$, ε_{-2} και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$, $\varepsilon_{-3,2}$ και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$.

Άσκηση 8.2 Βρείτε τις υ-ευθείες που περνούν από τα σημεία

α'. i και $2i$,

β'. i και $\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$,

γ'. $3 + 2i$ και $2 + 5i$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. ε_0 ,

β'. $\varepsilon_{0,1}$,

γ'. $\varepsilon_{-8,5\sqrt{5}}$.

Άσκηση 8.3 Βρείτε τα πέρατα των υ-ευθειών στην Άσκηση 8.2

Άσκηση 8.4 Σχεδιάστε τις υ-ευθείες με πέρατα $(2, 3)$, $(3, \infty)$, $(-1, 2)$ και $(\infty, -2)$.

Άσκηση 8.5 Δίδεται η υ-ευθεία $\varepsilon_{2,3}$ και το σημείο $w_0 = 2+i$. Από το σημείο w_0 υπάρχουν ακριβώς δύο υ-ευθείες παράλληλες στην $\varepsilon_{2,3}$ και άπειρες υ-ευθείες υπερπαράλληλες προς την $\varepsilon_{2,3}$. Βρείτε τα πέρατα των δύο παράλληλων υ-ευθειών, και μία παραμετρική έκφραση για τα πέρατα των υπερπαράλληλων.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Παράλληλες: $(-1, 7/3)$, $(5/3, 5)$.

Υπερπαράλληλες: κέντρο $2/3 < x < 10/3$, ακτίνα $r = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

Άσκηση 8.6 Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι υπερβολικοί μετασχηματισμοί, και ποιές είναι μετασχηματισμοί Möbius;

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = 3z + 1 \\ \gamma'. & f(z) = \frac{2z+3}{2z+2} \\ \epsilon'. & f(z) = \frac{3z+6}{2z+4} \\ \zeta'. & f(z) = \frac{3}{z} - 1 \\ \vartheta'. & f(z) = 2z - \frac{3}{z} \\ \iota\alpha'. & f(z) = \frac{1}{2\bar{z}+1} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \beta'. & f(z) = -z + 2 \\ \delta'. & f(z) = \frac{2\bar{z}+2}{3\bar{z}+1} \\ \varsigma'. & f(z) = \frac{3}{\bar{z}} - 1 \\ \eta'. & f(z) = -\frac{3}{z} - 2 \\ \iota'. & f(z) = \frac{1}{2z-5} \\ \iota\beta'. & f(z) = \frac{1}{-2\bar{z}-2} \end{array}$$

Γράψτε όσους είναι υπερβολικοί μετασχηματισμοί στην κανονική μορφή (α') ή (β'), με $ad - bc = 1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = 3z + 1 = \frac{\sqrt{3}z+1/\sqrt{3}}{0z+1/\sqrt{3}} \quad \text{Möbius ,} \\ \delta'. & f(z) = \frac{2\bar{z}+2}{3\bar{z}+1} = \frac{-1(-\bar{z})+1}{(-3/2)(-\bar{z})+1/2} \quad \text{Υπερβολικός μετασχηματισμός ,} \\ \varsigma'. & f(z) = \frac{3}{\bar{z}} - 1 = \frac{1/\sqrt{3}(-\bar{z})+\sqrt{3}}{-1/\sqrt{3}(-\bar{z})+0} \quad \text{Υπερβολικός μετασχηματισμός ,} \\ \eta'. & f(z) = -\frac{3}{z} - 2 = \frac{-2/\sqrt{3}z-\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}z+0} \quad \text{Möbius .} \end{array}$$

Άσκηση 8.7 Για τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς της Άσκησης 8.6, βρείτε την εικόνα του ∞ και το σημείο $z \in \partial\mathcal{H}$ που απεικονίζεται στο ∞ .

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(0) = 1, f(\infty) = \infty, \\ \delta'. & f(0) = 2, f(\infty) = 2/3, \\ \varsigma'. & f(0) = -3, f(\infty) = -1, \\ \eta'. & f(0) = \infty, f(\infty) = -2. \end{array}$$