

ΜΕΜ 233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Άσκηση 9.1 Εκφράστε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Möbius ως σύνθεση απεικονίσεων της μορφής $g(z) = z + q, q \in \mathbb{R}, h(z) = pz, p > 0$ ή $k(z) = -\frac{1}{z}$.

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = 3z - 2 \\ \beta'. & f(z) = \frac{-2}{3z+1} \\ \gamma'. & f(z) = \frac{z+1}{-2z+1} \\ \delta'. & f(z) = \frac{2z-1}{z+3} \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\alpha')$ $f = g \circ h$, όπου $h(z) = 3z, g(z) = z - 2$.

$\beta')$ $f = k \circ g \circ h$, όπου $h(z) = 3z/2, g(z) = z + 1/2$.

$\gamma')$ $f(z) = \frac{z+1}{-2z+1} = \frac{(1/\sqrt{3})z+1/\sqrt{3}}{(-2/\sqrt{3})z+1/\sqrt{3}}$ που γράφεται ως

$$f(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-1}{-(2/\sqrt{3})z + 1/\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2},$$

το οποίο είναι σύνθεση μετασχηματισμών της μορφής g, h και k .

Άσκηση 9.2 Βρείτε την εικόνα των υ-ευθειών ε_0 και $\varepsilon_{1,1}$ από τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = 3z - 2 \\ \beta'. & f(z) = \frac{2z-2}{z+1} \\ \gamma'. & f(z) = \frac{-2\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \\ \delta'. & f(z) = \frac{-1}{z} \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\alpha')$ $f(0) = -2, f(\infty) = \infty, f(2) = 4$, άρα $f(\varepsilon_0) = \varepsilon_{-2}$ και $f(\varepsilon_{1,1}) = \varepsilon_{1,3}$.

$\gamma')$ $f(0) = -1, f(\infty) = -2, f(2) = -5/3$, άρα $f(\varepsilon_0) = \varepsilon_{-3/2, -1/2}$ και $f(\varepsilon_{1,1}) = \varepsilon_{-4/3, 1/3}$.