Σημειώσεις μαθήματος Μ112

Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα

Βασισμένες στο βιβλίο του **G.Strang**

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2006

Κεφάλαιο 1

Πίνακες και Απαλοιφή Gauss

Η Γραμμική Αλγεβρα ξεκινάει με τη μελέτη συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων πρώτου βαθμού με πολλούς αγνώστους.

Δύο γεωμετρικές ερμηνείες

Θα εξετάσουμε το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 5 \end{array}$$

από δύο διαφορετικές απόψεις.

Πρώτα θεωρούμε κάθε γραμμή (εξίσωση) χωριστά. Η πρώτη γραμμή

$$2x - y = 1$$

παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο: την ευθεία που τέμνει τον x-άξονα στο $1/2$ και τον y-άξονα στο -1. Η δεύτερη γραμμή

$$x + y = 5$$

παριστάνει την ευθεία που τέμνει τον x-άξονα στο 5 και τον y-άξονα στο 5. Εάν οι δύο ευθείες τέμνονται, όπως στο παράδειγμα, το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση, τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου στο οποίο τέμνονται οι δύο ευθείες. Σε αυτό το παράδειγμα, το σημείο $(2, 3)$.

Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Δύο διαφορετικές ευθείες σε ένα επίπεδο, είτε τέμνονται είτε είναι παράλληλες. Εάν οι ευθείες είναι παράλληλες, όπως στο παράδειγμα

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & 0 \end{array}$$

το σύστημα δεν έχει καμία λύση. Εάν οι ευθείες συμπίπτουν, όπως στο παράδειγμα

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & -2 \end{array}$$

το σύστημα έχει πολλές λύσεις: οι συντεταγμένες (x, y) όλων των σημείων της ευθείας αποτελούν λύσεις του συστήματος.

Μία διαφορετική προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε τις στήλες, ως μία διανυσματική εξίσωση:

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Θέλουμε ένα συνδυασμό των διανυσμάτων στηλών στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης, με κατάλληλους συντελεστές x και y, που να δίνει τη δεξιά πλευρά. Γεωμετρικά αυτό δίδεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και η λύση είναι μοναδική εάν τα διανύσματα στήλες αποτελούν πλευρές παραλληλογράμμου, δηλαδή εάν δεν είναι συγγραμμικά.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί; Εάν τα διανύσματα στήλες είναι συγγραμμικά, τότε δεν σχηματίζουν παραλληλόγραμμο. Εάν το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά είναι επίσης συγγραμμικό, τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις. Εάν το διάνυσμα στα δεξιά δεν είναι συγγραμμικό με τα άλλα δύο, τότε δεν υπάρχει καμία λύση.

Ας δούμε τι συμβαίνει στις 3 διαστάσεις. Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array} \tag{1.1}$$

Εξετάζουμε πρώτα κάθε γραμμή (εξίσωση). Η πρώτη γραμμή παριστάνει το επίπεδο που τέμνει τους άξονες στα σημεία $(\frac{5}{2}, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 5)$. Η δεύτερη γραμμή παριστάνει το επίπεδο που τέμνει τους u- και v-άξονες στα σημεία $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ και $(0, \frac{1}{3}, 0)$. Οταν βάλουμε $u = 0$ και $v = 0$ τότε παίρνουμε $0w = -2$, που δεν έχει λύση. Συνεπώς το επίπεδο είναι παράλληλο προς τον w-άξονα. Πάντως τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία. Η τρίτη γραμμή παριστάνει πάλι ένα επίπεδο, που τέμνει αυτήν την ευθεία σε ένα σημείο. Οι συντεταγμένες αυτού του σημείου δίδουν τη λύση του συστήματος. Στο παράδειγμα, είναι το σημείο $(1, 1, 2)$.

Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Να μην τέμνονται τα τρία επίπεδα σε ένα μοναδικό σημείο. Στις τρεις διαστάσεις αυτό μπορεί να συμβεί με περισσότερους τρόπους:

- τα τρία επιπεδα να είναι παράλληλα,
- δύο επίπεδα να είναι παράλληλα και να τα τέμνει το τρίτο, σε δύο παράλληλες ευθείες,
- τα τρία επίπεδα να τέμνονται ανα δύο, σε τρεις παράλληλες ευθείες.
- τα τρία επίπεδα να τέμνονται σε μια κοινή ευθεία,
- δύο από τα επίπεδα να συμπίπτουν, και το τρίτο να τα τέμνει σε μια ευθεία,
- και τα τρία επίπεδα να συμπίπτουν.

Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις το σύστημα δεν έχει λύση, στις άλλες τρεις έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 1.1 Βρείτε σε ποιά περίπτωση αντιστοιχεί κάθε ένα από τα ακόλουθα συστήματα.

α′.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & + & 2v & + & 2w & = & 6 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

β′.

$$\begin{array}{rcccccl} u & + & v & + & w & = & 2 \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 6 \end{array}$$

γ′.

$$\begin{array}{rcccccl} u & + & v & + & w & = & 2 \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 7 \end{array}$$

Μπορούμε να κοιτάξουμε και πάλι το σύστημα (1.1) ως μια διανυσματική εξίσωση,

$$u \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Θέλουμε να βρούμε τους συντελεστές u, v και w ώστε ο συνδυασμός στα αριστερά να είναι ίσος με το διάνυσμα στα δεξιά. Γεωμετρικά, το άθροισμα τριών διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$ είναι η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα τρία διανύσματα. Ετσι, εάν τα τρία διανύσματα αποτελούν ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, τότε υπάρχει μοναδική λύση, σε αυτήν την περίπτωση $(u, v, w) = (1, 1, 2)$.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί; Εάν τα τρία διανύσματα δεν αποτελούν ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, αλλά βρίσκονται και τα τρία σε ένα επίπεδο, τότε το σύστημα έχει λύση μόνον εάν και το διάνυσμα στα δεξιά βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Διαφορετικά δεν έχει λύση. Εξετάζουμε το παράδειγμα

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = b\,.$$

Εάν

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

τότε η εξίσωση έχει λύση. Εάν

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

τότε η εξίσωση δεν έχει λύση.

Βλέπουμε οτι υπάρχουν δύο διαφορετικές γεωμετρικές ερμηνείες των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων σε δύο και τρεις αγνώστους. Η προσεκτική ανάλυση θα αποκαλύψει τη σχέση ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις, που ενώ τη διαισθανόμαστε δεν είναι εύκολο να την προσδιορίσουμε ακριβώς. Το πιο σημαντικό είναι οτι θα μας ελευθερώσει από τους περιορισμούς της γεωμετρικής διαίσθησης, και θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε συστήματα πολλών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους.

Διανύσματα

Ορισμός. Θα εργαστούμε αποκλειστικά σε σύνολα $\mathbb{R}^n$, για $n \geq 0$,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα ονομάζουμε **διανύσματα**, και το σύνολο $\mathbb{R}^n$ θα το αποκαλούμε **χώρο** (γραμμικό χώρο ή διανυσματικό χώρο). Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα μπορούμε να τα φανταζόμαστε ως σημεία ενός χώρου, όπως ο καρτεσιανός τριδιάστατος χώρος, ταυτίζοντας το διάνυσμα (x_1, x_2, x_3) με το σημείο με τις ίδιες καρτεσιανές συντεταγμένες. Μπορούμε επίσης να τα φανταζόμαστε ως βέλη, με αρχή στην αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$ και τέλος στο σημείο (x_1, x_2, x_3). Ανάλογα με την περίσταση, μπορεί η μία ή η άλλη ερμηνεία να είναι πιο χρήσιμη. Σε κάθε περίπτωση, ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ είναι μία διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών, $= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Σε αυτό το μάθημα, συνήθως, θα παριστάνουμε τα διανύσματα ως στήλες,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

αν και για λόγους τυπογραφικής οικονομίας, καμιά φορά θα γράφουμε τις συνιστώσες του διανύσματος χωρισμένες με κόμα, οριζόντια, σε παρενθέσεις, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διανυσμάτων με n συνιστώσες, ορίζουμε δύο πράξεις, την **πρόσθεση διανυσμάτων** και τον **πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό**.

Η πρόσθεση γίνεται συνιστώσα προς συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό, γίνεται επίσης κατά συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Ενας **γραμμικός συνδυασμός** διανυσμάτων είναι ένα άθροισμα των διανυσμάτων, πολλαπλασιασμένων με πραγματικούς αριθμούς (συντελεστές), για παράδειγμα

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n \end{bmatrix} .$$

Από την Αναλυτική Γεωμετρία γνωρίζουμε άλλη μια πράξη, την οποία μπορούμε να ορίσουμε μεταξύ διανυσμάτων με οποιοδήποτε αριθμό συνιστωσών, το **εσωτερικό γινόμενο**. (Προσέξτε οτι το *εξωτερικό* γινόμενο ορίζεται μόνον στο $\mathbb{R}^3$.) Εάν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ τότε

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

Ενα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, μπορούμε επίσης να το θεωρήσουμε με δύο τρόπους:

- Η κάθε γραμμή-εξίσωση, παριστάνει ένα 'επίπεδο' μέσα στο $\mathbb{R}^n$, και το σύστημα έχει μοναδική λύση εάν τα n 'επίπεδα' τέμνονται σε ένα μόνον σημείο.

- Η κάθε στήλη παριστάνει ένα διάνυσμα, και αναζητούμε τους συντελεστές ενός γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων στην αριστερή πλευρά ώστε να είναι ίσος με το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά.

Άσκηση 1.2 Σχεδιάστε στο καρτεσιανό επίπεδο τις ευθείες

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 2 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

α'. Βρείτε από το σχήμα τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.

β'. Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να βρείτε τη λύση του συστήματος.

γ'. Αλλάξτε τους συντελεστές του x και του y στη δεύτερη εξίσωση, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες.

δ'. Αλλάξτε το σταθερό συντελεστή της νέας εξίσωσης, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να συμπίπτουν.

Άσκηση 1.3 Θεωρείστε το παραπάνω σύστημα ως διανυσματική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σχεδιάστε τα τρία διανύσματα, και επαληθεύσατε οτι οι τιμές του x και y που υπολογίσατε στην 1.2, ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου για το άθροισμα διανυσμάτων.

Απαλοιφή Gauss

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Θα μελετήσουμε τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss, η οποία είναι κατάλληλη για την επίλυση μεγάλων συστημάτων, με πολλές εξισώσεις και πολλούς αγνώστους. Αν και θα εξετάσουμε την απαλοιφή Gauss στο απλό παράδειγμα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους του συστήματος (1.1), θέλουμε να δούμε συστηματικά τα βήματα της μεθόδου, ώστε να μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και σε πολύ μεγαλύτερα συστήματα, με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση δεν είναι 0. Αρα, εάν αφαιρέσουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης από όλες τις άλλες, μπορούμε να κάνουμε τους συντελεστές του u σε όλες τις εξισώσεις, εκτός από την πρώτη, ίσους με 0, δηλαδή να *απαλείψουμε* το u από αυτές τις εξισώσεις. Συγκεκριμένα

- Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη.
- Αφαιρούμε -1 φορά την πρώτη εξίσωση από την τρίτη (δηλαδή προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη).

Ο μη μηδενικός συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση ονομάζεται **πρώτος οδηγός**. Βρήκαμε τους **πολλαπλασιαστές** 2 και -1 διαιρώντας τους συντελεστές του u στη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση με τον πρώτο οδηγό. Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & 8v & + & 3w & = & 14 \end{array}$$

στο οποίο ο u έχει μηδενικό συντελεστή σε όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη. Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του v στη δεύτερη εξίσωση δεν είναι 0. Αυτός είναι ο **δεύτερος οδηγός**, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε το v από την τρίτη εξίσωση.

- Αφαιρούμε -1 φορά τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & w & = & 2 \end{array}$$

στο οποίο ο v έχει μηδενικό συντελεστή ‘σε όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη και τη δεύτερη’. Ο συντελεστής του w στην τρίτη εξίσωση δεν είναι 0 και είναι ο **τρίτος οδηγός**. Είναι εύκολο να λύσουμε αυτό το σύστημα. Από την τρίτη εξίσωση έχουμε

$$w = 2\,.$$

Αντικαθιστούμε το w στη δεύτερη εξίσωση, $-8v - 4 = -12$, άρα

$$v = 1\,.$$

Αντικαθιστούμε τα v και w στην πρώτη εξίσωση, $2u + 1 + 2 = 5$, άρα

$$u = 1\,.$$

Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ανάδρομη αντικατάσταση** (back substitution).

Η απαλοιφή Gauss (Gauss elimination) βασίζεται στην παρατήρηση οτι εάν κάποιες τιμές των u, v και w ικανοποιούν ένα σύστημα εξισώσεων, τότε ακριβώς οι ίδιες τιμές ικανοποιούν και κάθε σύστημα που προκύπτει από το αρχικό με έναν από τους ακόλουθους δύο τρόπους:

- Εάν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία γράφουμε τις εξισώσεις
- Εάν πολλαπλασιάσουμε μία εξίσωση με έναν αριθμό, και αφαιρέσουμε αυτό το πολλαπλάσιο από μία από τις άλλες εξισώσεις.

Η απαλοιφή Gauss βασίζεται στη συστηματική επανάληψη αυτών των δύο βημάτων, ώστε να καταλήξουμε σε ένα απλούστερο σύστημα, για το οποίο μπορούμε εύκολα να βρούμε το σύνολο λύσεων.

Καταγράφουμε πιο οικονομικά τη διαδικασία της απαλοιφής χρησιμοποιώντας έναν πίνακα με τους συντελεστές της εξίσωσης και τη δεξιά πλευρά:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί, που εμφανίζονται με παχιά στοιχεία στον πίνακα, πρέπει να μη μηδενίζονται, εφόσον θέλουμε να διαιρέσουμε με αυτούς. Εαν λοιπόν στη διαδικασία της απαλοιφής σε ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, εμφανίζονται n (μη μηδενικοί) οδηγοί, τότε υπάρχει μια και μοναδική λύση του συστήματος, την οποία βρίσκουμε με ανάδρομη αντικατάσταση.

Εάν σε κάποιο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής εμφανίζεται μηδέν στη θέση ενός οδηγού, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

1. Εάν υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής σε κάποια πιό κάτω θέση στη στήλη που εξετάζουμε, τότε αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων, δηλαδή εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα, ώστε να φέρουμε το μη μηδενικό συντελεστή στη θέση του οδηγού. Για το σύστημα εξισώσεων
$$\begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & a \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = & c \end{array} \tag{1.3}$$
έχουμε
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 6 & 8 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 2 & 4 & -4a+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & -4a+c \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & -2a+b \end{bmatrix}$$
Ετσι έχουμε πλήρες σύνολο οδηγών, και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

2. Εάν όλοι οι συντελεστές στις πιο κάτω θέσεις στη στήλη που εξετάζουμε είναι μηδέν, τότε δεν μπορούμε να βρούμε πλήρες σύνολο οδηγών. Το σύστημα ονομάζεται **ιδιόμορφο**. Για παράδειγμα, στο σύστημα
$$\begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & a \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = & c \end{array}$$

μετά την απαλοιφή των συντελεστών του u, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & -4a+c \end{bmatrix}$$

και δεν μπορεί να προχωρήσει η απαλοιφή. Ενα ιδιόμορφο σύστημα μπορεί να μην έχει καμία λύση, ή να έχει πολλές λύσεις. Αυτό εξαρτάται από τη δεξιά πλευρά.

- Εάν $-2a+b=6$ και $-4a+c=7$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} 3w &= 6 \\ 4w &= 7 \end{aligned}$$

  και δεν υπάρχει λύση. Το σύστημα είναι **ασύμβατο**.

- Εάν όμως $-2a+b=6$ και $-4a+c=8$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} 3w &= 6 \\ 4w &= 8 \end{aligned}$$

  και $w=2$. Αλλά η πρώτη εξίσωση δεν μπορεί να προσδιορίσει και το u και το v. Το σύστημα είναι **απροσδιόριστο**.

Άσκηση 1.4 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 2u - 3v \phantom{{}+w} &= 3 \\ 4u - 5v + w &= 7 \\ 2u - v - 3w &= 5 \end{aligned}$$

α΄. Κάθε εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο στο τριδιάστατο χώρο με σύστημα συντεταγμένων u, v, w. Βρείτε τα σημεία τομής κάθε επιπέδου με τους άξονες, και προσπαθήστε να σχεδιάσετε μέρος των τριών επιπέδων στο σχήμα σας.

β΄. Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να βρείτε τη λύση του συστήματος: αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης εξίσωσης από τη δεύτερη, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του u στη δεύτερη εξίσωση. Κάνετε το ίδιο για την τρίτη εξίσωση. Κατόπιν αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της (νέας) δεύτερης εξίσωσης από την (νέα) τρίτη εξίσωση, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του v στην τρίτη εξίσωση. Βρείτε το w και εφαρμόστε ανάδρομη αντικατάσταση για να βρείτε το v και το u.

Άσκηση 1.5 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} u + v + w &= -2 \\ 3u + 3v - w &= 6 \\ u - v + w &= -1 \end{aligned}$$

α΄. Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss στο παραπάνω σύστημα (μπορεί να χρειαστεί να αλλάξετε τη σειρά των εξισώσεων σε κάποιο βήμα).

β΄. Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.

Άσκηση 1.6 Είναι σωστές ή λανθασμένες οι ακόλουθες παρατηρήσεις για τη διαδικασία απαλοιφής Gauss;

α′. Εάν η τρίτη εξίσωση ξεκινά με μηδενικό συντελεστή, τότε δεν αφαιρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 από την εξίσωση 3.

β′. Εάν η τρίτη εξίσωση έχει μηδενικό δεύτερο συντελεστή τότε δεν αφαιρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 2 από την εξίσωση 3.

γ′. Εάν η τρίτη εξίσωση έχει μηδενικούς τους δύο πρώτους συντελεστές, τότε δεν αφαιρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 ή της εξίσωσης 2 από την εξίσωση 3.

Άσκηση 1.7 Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

τέτοιους ώστε

α′. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2.

β′. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη συνιστώσα να είναι -2.

γ′. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη συνιστώσα να είναι 2.

δ′. Η τρίτη συνιστώσα να είναι 1.

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Πίνακες

Για μεγαλύτερα συστήματα δεν είναι πρακτικό να γράφουμε αναλυτικά κάθε εξίσωση και να καταγράφουμε την απαλοιφή. Ο συμβολισμός πινάκων είναι πολύ χρήσιμος.

Στη δεξιά πλευρά μιας εξίσωσης έχουμε ένα διάνυσμα-στήλη, b. Στο παράδειγμα (1.2),

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} .$$

Στην αριστερή πλευρά, έχουμε τους αγνώστους, τους οποίους επίσης γράφουμε ως ένα διάνυσμα-στήλη,

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} .$$

Τέλος έχουμε τους 9 συντελεστές, τους οποίους γράφουμε ως ένα πίνακα, με τρεις γραμμές και τρεις στήλες,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} .$$

Αυτός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 3 επί 3.

Ορισμός. Ενας **m** επί **n πίνακας**, ή πίνακας με **m γραμμές** και **n στήλες** είναι μια διάταξη mn πραγματικών αριθμών σε m γραμμές και n στήλες, κλεισμένη σε ορθογώνιες παρενθέσεις [,]. Εάν $m = n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι **τετραγωνικός**. Εάν $m \neq n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι **παραλληλόγραμμος**.

Οι πίνακες προστίθενται κατά συνιστώσα, και πολλαπλασιάζονται με αριθμούς, ακριβώς όπως τα διανύσματα. Συχνά θα θεωρούμε ένα n-διάνυσμα ώς ένα $n \times 1$ πίνακα. Μπορούμε να προσθέσουμε δύο πίνακες *μόνον εάν έχουν τις ίδιες διαστάσεις*, δηλαδή τον ίδιο αριθμό γραμμών και τον ίδιο αριθμό στηλών. Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{6} & -5 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1+\sqrt{6} & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 12 & -18 & 0 \end{bmatrix} .$$

Χρειαζόμαστε συμβολισμό για να αναφερόμαστε σε κάθε συνιστώσα ενός πίνακα. Η συνιστώσα στη γραμμή i και στη στήλη j συμβολίζεται a_{ij}. Ετσι ο $m \times n$ πίνακας A συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Μια συντόμευση αυτού του συμβολισμού είναι να γράφουμε $A = (a_{ij})$. Ετσι, εάν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ είναι $m \times n$ πίνακες, συμβολίζουμε $(A+B)_{ij}$ τη συνιστώσα στη θέση ij του αθροίσματος $A + B$, και έχουμε

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \,,$$

ενώ

$$(\alpha B)_{ij} = \alpha b_{ij} \,.$$

Είδαμε οτι η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (1.2) μπορεί να θεωρηθεί ως ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A, με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος x. Τέτοιοι συνδυασμοί εμφανίζονται συχνά, και μας οδηγούν να ορίσουμε μια πράξη μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων.

Ορισμός. Το **γινόμενο** του $m \times n$ πίνακα A με το n-διάνυσμα x είναι ένα m-διάνυσμα Ax, του οποίου η συνιστώσα στη θέση i είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A με το x, $Ax = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, όπου

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \text{ για } i = 1, \dots, m.$$

Προσέξτε τη σχέση ανάμεσα στις διαστάσεις του $m \times n$ πίνακα A, του n-διανύσματος x και του m-διανύσματος Ax.

Παράδειγμα 1.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+10+0 \\ 6+0+0 \\ 2+5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Ελέγχουμε οτι το διάνυσμα Ax είναι πράγματι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Για να αναφερθούμε στις συνιστώσες τέτοιων γινομένων, συχνά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sum$ για αθροίσματα:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j .$$

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής μέσω πινάκων. Ένα διαφορετικό είδος γινομένου διανύσματος με πίνακα, όπου τώρα γράφουμε το διάνυσμα ως γραμμή και στα αριστερά του πίνακα, είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -2 \end{bmatrix} .$$

Η κάθε συνιστώσα της γραμμής στα δεξιά είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος-γραμμή με την αντίστοιχη στήλη του πίνακα. Παρατηρούμε οτι ολόκληρη η γραμμή στα δεξιά είναι το αποτέλεσμα του να αφαιρέσουμε 2 φορές την πρώτη γραμμή του πίνακα από τη δεύτερη, δηλαδή ακριβώς αυτό που κάναμε στην απαλοιφή στο σύστημα (1.1). Εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα στη γραμμή $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} .$$

Το αποτέλεσμα είναι η τρίτη γραμμή του πίνακα. Από αυτές τις παρατηρήσεις οδηγούμαστε στη δυνατότητα να εκφράσουμε το πρώτο βήμα της απαλοιφής μέσω 'πολλαπλασιασμού' του πίνακα A με έναν πίνακα E:

$$E\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Ορισμός. Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A και τον $n \times p$ πίνακα B. Το **γινόμενο** AB είναι ο $m \times p$ πίνακας, ο οποίος έχει στοιχείο στη θέση ij το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A και της j-στήλης του B,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \text{ για } i = 1, \ldots, m \text{ και } j = 1, \ldots, p.$$

Για να ορίζεται το γινόμενο πρέπει ο αριθμός των στηλών του A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B.

Παράδειγμα 1.2 Πολλαπλασιασμός με τον 2×2 πίνακα I αφήνει αμετάβλητο τον 2×3 πίνακα B:

$$I\,B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} .$$

Παράδειγμα 1.3 Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός, ακόμη και όταν ορίζονται και οι δύο πίνακες AB και BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} ,$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} .$$

Παράδειγμα 1.4 Πολλαπλασιασμός από τα αριστερά με τον πίνακα P εναλλάσσει τις γραμμές του B, πολλαπλασιασμός με τον P από τα δεξιά εναλλάσσει τις στήλες του B:

$$PB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ,$$

$$BP = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} .$$

Εκτός από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων που δώσαμε, οι ακόλουθες δύο θεωρήσεις είναι συχνά πολύ χρήσιμες.

Πρόταση 1.1 *1. Η i γραμμή του πίνακα AB είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του B με συντελεστές τις συνιστώσες της i γραμμής του A.*

2. Η j στήλη του πίνακα AB είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A με συντελεστές τις συνιστώσες της j στήλης του B.

Απόδειξη. Η i γραμμή του AB είναι

$$\begin{bmatrix} (AB)_{i1} & \dots & (AB)_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \begin{bmatrix} b_{k1} & \dots & b_{kp} \end{bmatrix} .$$

Γράψτε τον ανάλογο υπολογισμό για τις στήλες.

□

Πρόταση 1.2 *Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός, και επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση. Συγκεκριμένα, εάν A, B είναι $m \times n$ πίνακες, C, D είναι $n \times p$ πίνακες και E είναι $p \times q$ πίνακας, τότε*

1.

$$A(CE) = (AC)E ,$$

2.

$$A(C + D) = AC + AD \quad , \quad (A + B)C = AC + BC .$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αποτελεί άσκηση στη χρήση του συμβολισμού $\sum$ για τα αθροίσματα. Για $i = 1, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, q$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(A(CE))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(CE)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{t=1}^{p} c_{kt} e_{tj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik} c_{kt} e_{tj} \\
&= \sum_{t=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kt} e_{tj} \\
&= \sum_{t=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kt} \right) e_{tj} \\
&= \sum_{t=1}^{p} (AC)_{it} e_{tj} \\
&= ((AC)E)_{ij} \,.
\end{aligned}$$

Η επαλήθευση της επιμεριστικής ιδιότητας είναι απλούστερη και αφήνεται ως άσκηση. □

Άσκηση 1.8 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,5 \\ \pi/2 \\ \sqrt{2}/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 6\cos(\pi/6) & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.9 Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες A και B με στοιχεία

$$a_{ij} = i - j \quad \text{και} \quad b_{ij} = \frac{1}{j} \,.$$

και υπολογίστε τα γινόμενα AB, BA και A^2.

Άσκηση 1.10 Οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι τα διανύσματα $c_1, c_2, \ldots, c_n$, και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Το γινόμενο $c_i r_i$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.

Εκφραση της απαλοιφής μέσω πινάκων

Οπως είδαμε στο (1.4), το πρώτο βήμα της απαλοιφής στο σύστημα (1.1) περιγράφεται μέσω πολλαπλασιασμού από αριστερά, του πίνακα συντελεστών με κατάλληλο πίνακα.

Ορισμός. Ο πίνακας που έχει 1 στη διαγώνιο και $-\lambda \neq 0$ στη θέση ij για $i \neq j$, ενώ έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις, ονομάζεται ***στοιχειώδης πίνακας***, και συμβολίζεται E_{ij}.
Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα πίνακα A από τα *αριστερά* με τον E_{ij}, το αποτέλεσμα είναι να αφαιρούμε λ φορές τη γραμμή j από τη γραμμή i του A.
Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα πίνακα A από τα *δεξιά* με τον E_{ij}, το αποτέλεσμα είναι να αφαιρούμε λ φορές τη στήλη i από τη στήλη j του A.
Προσέξτε τη διαφορά στη διάταξη των δεικτών

Ας εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία στον πίνακα του συστήματος 1.1,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Αφαιρούμε -1 φορά την πρώτη γραμμή από την τρίτη

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Αφαιρούμε -1 φορά τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε οτι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα A από τα αριστερά, πρώτα με τον $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, κατόπιν με τον $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και τέλος με τον $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την απαλοιφή Gauss. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και με το διάνυσμα b. Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα, καταλήγουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε την απαλοιφή ως πολλαπλασιασμό του πίνακα A και του διανύσματος b με το γινόμενο GFE. Το αρχικό σύστημα

$$AX = b$$

γίνεται

$$GFEAx = GFEb\,.$$

Ορισμός. Ενας πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται ***άνω τριγωνικός*** εάν όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν $a_{ij} = 0$ όταν $i > j$.
Ενας πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται ***κάτω τριγωνικός*** εάν όλα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν $a_{ij} = 0$ όταν $i < j$.

Εάν γράψουμε $U = GFEA$ και $c = GFEb$, U είναι άνω τριγωνικός πίνακας, και έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$Ux = c$$

το οποίο λύνεται με ανάδρομη αντικατάσταση, και έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό σύστημα.

Μπορούμε να αναιρέσουμε τα βήματα της απαλοιφής, για να πάμε από τον πίνακα U στον A: πρέπει να αναιρέσουμε ένα - ένα βήμα, με την αντίστροφη σειρά. Είναι φανερό οτι για να αναιρέσουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με τον G αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα που **προσθέτει** (-1) φορές τη δεύτερη σειρά στην τρίτη,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

τον οποίο θα συμβολίσουμε G^{-1}. Ανάλογα ορίζουμε τους πίνακες F^{-1} και E^{-1}, και έχουμε

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A\,.$$

Το γινόμενο $E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, τον οποίο συμβολίζουμε L. Εχουμε γράψει τον πίνακα A σαν γινόμενο

$$A = LU\,.$$

Πρόταση 1.3 *Εάν στο $n \times n$ σύστημα $Ax = b$ η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε εναλλαγές γραμμών, τότε ο πίνακας A γράφεται ως γινόμενο $A = LU$, όπου*

- *L είναι κάτω τριγωνικός, με 1 στη διαγώνιο, και τους πολλαπλασιαστές λ_{ij} κάτω από τη διαγώνιο.*
- *U είναι άνω τριγωνικός, με τους οδηγούς στη διαγώνιο.*

Μπορούμε να χωρίσουμε το σύστημα σε δύο τριγωνικά συστήματα

$$Lc = b \quad \text{και} \quad Ux = c\,.$$

Εκτός από την παραγοντοποίηση $A = LU$, καμιά φορά χρησιμοποιούμε μια πιό συμμετρική παραγοντοποίηση: γράφουμε τον U ως γινόμενο ενός διαγώνιου πίνακα D με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U', με 1 στη διαγώνιο,

$$A = LDU'\,.$$

Άσκηση 1.11 Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες L και U των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.12 Λύστε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

αναλύοντάς την σε δύο τριγωνικές εξισώσεις, $Lc = b$ και $Ux = b$.

Άσκηση 1.13 Βρείτε πόσους πολλαπλασιασμούς αριθμών χρειάζεται να κάνετε για να πολλαπλασιάσετε ένα 2×3 πίνακα με ένα 3×5 πίνακα.

Εναλλαγές γραμμών

Στο σύστημα εξισώσεων (1.3) χρειάστηκε να αλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων, για να βρούμε ένα πλήρες σύνολο οδηγών. Πώς μπορούμε να παραστήσουμε μέσω πινάκων τις εναλλαγές γραμμών;

Παράδειγμα 1.5

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P_{23}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Ο πίνακας P_{23} εναλλάσσει τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή του πίνακα A όταν πολλαπλασιάζουμε τον A με τον P_{23} από τα αριστερά.

Ορισμός. Ονομάζουμε ***πίνακα εναλλαγής*** P_{ij} τον πίνακα που εναλλάσει την i γραμμή και τη j γραμμή του πίνακα A όταν πολλαπλασιάζουμε τον A με τον P_{ij} από τα αριστερά. Ο πίνακας P_{ij} έχει 1 στις θέσεις ij και ji, και στη διαγώνιο εκτός από τις θέσεις ii και jj, ενώ έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις.

Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα δεξιά με τον πίνακα εναλλαγής P_{ij}, το αποτέλεσμα είναι η εναλλαγή των στηλών i και j του A.

Το γινόμενο πινάκων εναλλαγής ονομάζεται πίνακας μεταθέσεως. Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα αριστερά με ένα πίνακα μεταθέσεως, το αποτέλεσμα είναι μία μετάθεση των γραμμών του πίνακα A, ενώ όταν πολλαπλασιάζουμε από τα δεξιά μία μετάθεση των στηλών του A.

Υποθέτουμε οτι στη διαδικασία της απαλοιφής Gauss για τον πίνακα A, χρειάζεται να κάνουμε διαδοχικά τις εναλλαγές γραμμών, που παριστάνονται από τους πίνακες $P_{i_1 j_1}$, $P_{i_2 j_2}$, $\ldots$, $P_{i_k j_k}$. Θεωρητικά θα μπορούσαμε να κάνουμε όλες τις εναλλαγές γραμμών στην αρχή, χρησιμοποιώντας το γινόμενο των πινάκων εναλλαγής $P = P_{i_k j_k} \ldots P_{i_1 j_1}$, και κατόπιν να ξεκινήσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής στον πίνακα PA. Στον PA η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε εναλλαγές γραμμών, και συνεπώς έχουμε παραγοντοποίηση

$$PA = LU\,.$$

Τώρα μπορούμε να δώσουμε έναν ορισμό του ιδιόμορφου πίνακα, και να ανακεφαλαιώσουμε τα μέχρι τώρα αποτελέσματα σε ένα Θεώρημα. Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Μετά την ολοκλήρωση της απαλοιφής στις k πρώτες στήλες, ο $n \times n$ πίνακας A έχει αντικατασταθεί από πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix} U_k & X \\ 0 & A_{k+1} \end{bmatrix},$$

όπου U_k είναι $k \times k$ άνω τριγωνικός πίνακας και A_{k+1} είναι $(n-k) \times (n-k)$ πίνακας.

Ορισμός. Ο πίνακας A είναι ***ιδιόμορφος*** εάν κάποιος από τους πίνακες A_j, για $j = 1, \ldots, n$ που εμφανίζονται στη διαδικασία της απαλοιφής έχει μια ολόκληρη στήλη από 0.

Θεώρημα 1.4 *Εστω ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους*

$$Ax = b\,.$$

Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα

1. *Εάν το σύστημα είναι ιδιόμορφο, τότε καμία αναδιάταξη των γραμμών δεν μπορεί να παραγάγει ένα πλήρες σύνολο οδηγών.*

2. *Εάν το σύστημα δεν είναι ιδιόμορφο, τότε υπάρχει ένας πίνακας μεταθέσεως P τέτοιος ώστε στη διαδικασία απαλοιφής του PA δεν εμφανίζονται μηδενικά στη θέση των οδηγών. Σε αυτή την περίπτωση*

   (α΄) *Το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία υπολογίζεται με τη διαδικασία απαλοιφής και ανάδρομης αντικατάστασης.*

   (β΄) *Ο πίνακας PA παραγοντοποιείται ως γινόμενο*

   $$PA = LDU'$$

   όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος πίνακας με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και U' είναι άνω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο. Η παραγοντοποίηση σε πίνακες με αυτές τις ιδιότητες είναι μοναδική.

Άσκηση 1.14 Λύστε το ακόλουθο σύστημα με απαλοιφή, κάνοντας εναλλαγή γραμμών όπου αυτό είναι απαραίτητο:

$$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & 4v & + & 2w & = & -2 \\ -2u & - & 8v & + & 3w & = & 32 \\ & & v & + & w & = & 1 \end{array}$$

Άσκηση 1.15 Δείξτε οτι η παραγοντοποίηση $A = LDU'$ ενός πίνακα είναι μοναδική.

Αντίστροφοι πίνακες

Σε αυτήν τη παράγραφο περιοριζόμαστε σε τετραγωνικούς πίνακες.

Ορισμός. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται ***αντιστρέψιμος*** εάν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε

$$BA = I \quad \text{και} \quad AB = I\,.$$

Ενας τέτοιος πίνακας B ονομάζεται ***αντίστροφος*** του A, και συμβολίζεται A^{-1}.

Θα δούμε αργότερα οτι αρκεί η μία από τις δύο συνθήκες. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε, στο κεφάλαιο 2, την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.5 *Εάν A είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $AB = I$ εάν και μόνον εάν υπάρχει πίνακας C τέτοιος ώστε $CA = I$.*

Πρόταση 1.6 *Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφος πίνακας είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Εάν B και C είναι αντίστροφοι του A, τότε $AB = I = CA$. Αρα

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C\,.$$

□

Παράδειγμα 1.6 Ενας 1×1 πίνακας $A = [a]$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $a \neq 0$, και ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = [1/a]$.
Ενας 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $ad - bc \neq 0$, και ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Πρόταση 1.7 *Το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων A και B είναι αντιστρέψιμος πίνακας, και*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι $B^{-1}A^{-1}$ ικανοποιεί τις σχέσεις που ορίζουν τον αντίστροφο.

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I\,,\\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\,.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.7 Εάν A, F, G είναι αντιστρέψιμοι, τότε

$$GFEA = U \quad \Rightarrow \quad E = F^{-1}G^{-1}UA^{-1}\,.$$

Άσκηση 1.16 Εάν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, δείξτε οτι $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Άσκηση 1.17 Βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Η διαδικασία Gauss - Jordan για την εύρεση του αντιστρόφου

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα A θεωρούμε την εξίσωση $AA^{-1} = I$ στήλη προς στήλη: εάν x_j είναι η j στήλη του A^{-1}, και e_j η j στήλη του I, έχουμε

$$Ax_j = e_j \quad , \quad j = 1, \ldots, n.$$

Δηλαδή, για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο A^{-1} πρέπει να λύσουμε n συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους. Ομως ο πίνακας συντελεστών A είναι ο ίδιος και για τα n συστήματα. Αρα η απαλοιφή Gauss μπορεί να γίνει μία φορά, για όλα τα συστήματα. Για να καταγράψουμε αυτή τη διαδικασία φτιάχνουμε τον *επαυξημένο* πίνακα με τις στήλες του A και τις στήλες του I.

$$\begin{aligned}
[A\, I] &= [A\, e_1\, e_2\, e_3] \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[U\, L^{-1}\right]
\end{aligned}$$

Αντί να προχωρήσουμε στην ανάδρομη αντικατάσταση με το συνήθη τρόπο, συνεχίζουμε την απαλοιφή των στοιχείων πάνω από τη διαγώνιο, ξεκινώντας από την τελευταία στήλη. Προσθέτουμε δύο φορές την τρίτη γραμμή στη δεύτερη γραμμή, και αφαιρούμε μία φορά την τρίτη γραμμή από την πρώτη γραμμή:

$$\left[U\, L^{-1}\right] \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε 1/8 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη γραμμή:

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

διαιρούμε με τους οδηγούς, για να πάρουμε I στις τρεις στήλες στα αριστερά:

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I\, B]\ .$$

Οι στήλες του B είναι ακριβώς οι λύσεις των εξισώσεων $Ax_j = e_j$, δηλαδή $AB = I$. Κοιτώντας το διαφορετικά, κάθε βήμα της διαδικασίας που ακολουθήσαμε αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με ένα πίνακα $F_1, \ldots, F_k$. Από το αριστερό μέρος του επαυξημένου πίνακα έχουμε $F_k \ldots F_1 A = I$, ενώ από το δεξί μέρος έχουμε $F_k \ldots F_1 I = B$. Συνεπώς $BA = I$, και $B = A^{-1}$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε ονομάζεται *απαλοιφή Gauss - Jordan*, και μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε μη ιδιόμορφο πίνακα. Αρα έχουμε αποδείξει οτι *κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας είναι αντιστρέψιμος*. Θα δείξουμε και το αντίστροφο, *ένας ιδιόμορφος πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος*.

Εάν A είναι ιδιόμορφος, τότε σε κάποιο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής έχουμε $A' = \begin{bmatrix} U & X \\ 0 & A_{k+1} \end{bmatrix}$, όπου A_{k+1} έχει μία στήλη μηδενικά, έστω την στήλη j για $k+1 \leq j \leq n$ με την αρίθμηση του πίνακα A'. Είναι φανερό οτι μπορούμε να κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης j του πίνακα A' ίσα με 0, αφαιρώντας πολλαπλάσια των στηλών $1, \ldots, k$ του A' από τη στήλη j. Υπενθυμίζουμε οτι αυτό ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του A' από τα δεξιά με κατάλληλους στοιχειώδεις πίνακες. Καταλήγουμε οτι, εάν ο A είναι ιδιόμορφος, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες B και C τέτοιοι ώστε BAC έχει μια στήλη από 0. Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη με δύο Λήμματα.

Λήμμα 1.8 *Εάν B και C είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν ο BAC είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Προφανώς, εάν υπάρχει ο A^{-1}, τότε $(BAC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Αντιστρόφως, εάν υπάρχει ο $(BAC)^{-1}$, ελέγχουμε οτι $C(BAC)^{-1}B$ είναι αντίστροφο του A:

$$A(C(BAC)^{-1}B) = (B^{-1}B)A(C(BAC)^{-1}B) = B^{-1}(BAC)(BAC)^{-1}B) = I\,.$$

□

Λήμμα 1.9 *Ενας πίνακας με μια στήλη μηδενικών δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του γινομένου BA για οποιοδήποτε B, εάν A έχει στην j-στήλη μηδενικά, τότε BA έχει επίσης μηδενικά στην j-στήλη. Αρα $BA \neq I$.

□

Εχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα 1.10 *Ενας πίνακας είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 1.18 Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss - Jordan για να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.19 Βρείτε x τέτοιο ώστε

α΄.

$$\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

β′.

$$2\begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.20 Δείξτε οτι εάν ένας πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες, ή δύο στήλες ίσες, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ανάστροφοι πίνακες

Ορισμός. Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, ονομάζουμε ***ανάστροφο (transpose)*** του A, και συμβολίζουμε A^T τον $n \times m$ πίνακα του οποίου οι στήλες είναι οι γραμμές του A. Το στοιχείο στη θέση ij του πίνακα A^T είναι ίσο με το στοιχείο στη θέση ji του A:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}\,.$$

Παράδειγμα 1.8

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε τις ακόλουθες ιδιότητες του αντιστρόφου.

Πρόταση 1.11 *Εάν A, B είναι $m \times n$ πίνακες, και C είναι $n \times p$ πίνακας, τότε*

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(AC)^T = C^T A^T$.
3. *Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Ορισμός. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται ***συμμετρικός*** εάν $A^T = A$, δηλαδή εάν $(A)_{ij} = (A)_{ji}$ για κάθε i, j. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται ***αντισυμμετρικός*** εάν $A^T = -A$, δηλαδή εάν $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$ για κάθε i, j.

Πρόταση 1.12 *Εάν A είναι συμμετρικός πίνακας, και $A = LDU'$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος και U' είναι άνω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, τότε*

$$L^T = U'\,.$$

Απόδειξη. Εχουμε $LDU' = A = A^T = (LDU')^T = (U')^T D^T L^T$. Αλλά $(U')^T$ είναι κάτω τριγωνικός, D^T είναι διαγώνιος και L^T είναι άνω τριγωνικός, και από τη μοναδικότητα της παραγοντοποίησης $A = LDU'$, έχουμε $L^T = U'$, και $(U')^T = L$.

$\square$

Άσκηση 1.21 Βρείτε τον ανάστροφο των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 1.22 Συμπληρώστε τα $*$ στους ακόλουθους πίνακες, έτσι ώστε να είναι συμμετρικοί:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 1.23 Βρείτε A τέτοιο ώστε $(4A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 1.24 Δείξτε οτι εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad , \quad (A^T B^T)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^T .$$

Άσκηση 1.25 Δίδονται πίνακες A σχήματος 4×1, B σχήματος 2×3, C σχήματος 2×4 και D σχήματος 1×3. Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες ορίζονται, και τί σχήμα έχουν;

α′. ADB^T β′. $C^T B - 5AD$
γ′. $4CA - (CA)^2$ δ′. $(ADB^T C)^2 - I_4$

Κεφάλαιο 2

Πίνακες και Διανυσματικοί Υπόχωροι

Θέλουμε να εξετάσουμε υποσύνολα των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^n$ στα οποία ορίζονται οι πράξεις των διανυσμάτων. Θεωρούμε πρώτα μία ευθεία στο $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon = \{(x,\, y) \,|\, -3x+2y=6\}$. Εάν προσθέσουμε δύο διανύσματα του συνόλου ε, το άθροισμα δεν ανήκει στο ε. Εάν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα του ε με έναν αριθμό, το γινόμενο δεν ανήκει στο ε:

$$(-2,\, 0) \in \varepsilon,\, (0,\, 3) \in \varepsilon,\ \text{αλλά}\ (-2,\, 0) + (0,\, 3) \notin \varepsilon,\, 2(-2,\, 0) \notin \varepsilon\,.$$

Αντιθέτως, για την ευθεία $\delta = \{(x,\, y) \,|\, -3x+2y=0\}$, εάν $(x_1,\, y_1) \in \delta$, $(x_2,\, y_2) \in \delta$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$(x_1,\, y_1) + (x_2,\, y_2) = (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \in \delta,\ \text{και}\ \lambda(x_1,\, y_1) = (\lambda x_1,\, \lambda y_1) \in \delta\,.$$

Ανάλογα στο $\mathbb{R}^3$, το επίπεδο $\Pi = \{(u,\, v,\, w) \,|\, 2u+v+w=0\}$ έχει την ιδιότητα οτι εάν $a,\, b \in \Pi$ τότε $a+b \in \Pi$ και $\lambda b \in \Pi$, ενώ το επίπεδο $\Lambda = \{(u,\, v,\, w) \,|\, 2u+v+w=5\}$ δεν έχει αυτήν την ιδιότητα.

Ορισμός. Ενα υποσύνολο V του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ***διανυσματικός υπόχωρος (ή γραμμικός υπόχωρος)*** του $\mathbb{R}^n$ εάν

1. V δεν είναι κενό, $V \neq \phi$.
2. V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση: εάν $a,\, b \in V$ τότε $a+b \in V$.
3. V είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό: εάν $a \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda a \in V$.

Παράδειγμα 2.1 Παρατηρούμε οτι εάν V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε το μηδενικό διάνυσμα $0 = (0,\, \ldots,\, 0) \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο V. Πράγματι, αφού V δεν είναι κενό, υπάρχει κάποιο $a \in V$ και $0 = a + (-1)a \in V$.

Το σύνολο $\{(0,\, \ldots,\, 0) \in \mathbb{R}^n\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Στο $\mathbb{R}^3$, διανυσματικοί υπόχωροι είναι: όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$, κάθε επίπεδο που περιέχει το $0 \in \mathbb{R}^3$, κάθε ευθεία που περιέχει το $0 \in \mathbb{R}^3$, το μονοσύνολο $\{0 \in \mathbb{R}^3\}$.

Θα μελετήσουμε ορισμένους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^m$ και του $\mathbb{R}^n$ που συνδέονται με ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους.

Παράδειγμα 2.2 Θεωρούμε το σύστημα $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\,.$$

Πότε έχει το σύστημα λύση; Είναι φανερό οτι υπάρχει λύση εάν και μόνον εάν το διάνυσμα b μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A είναι το σύνολο $V = \{\lambda_1(1,\,5,\,2)+\lambda_2(0,\,4,\,4)\,|\,\lambda_1,\,\lambda_2 \in \mathbb{R}\}$. Το σύνολο V δεν είναι κενό, εφόσον $(1,\,5,\,2) \in V$, και είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό: $(\lambda_1(1,\,5,\,2)+\lambda_2(0,\,4,\,4))+(\mu_1(1,\,5,\,2)+\mu_2(0,\,4,\,4)) = (\lambda_1+\mu_1)(1,\,5,\,2)+(\lambda_2+\mu_2)(0,\,4,\,4)$, και $\mu(\lambda_1(1,\,5,\,2)+\lambda_2(0,\,4,\,4)) = \mu\lambda_1(1,\,5,\,2)+\mu\lambda_2(0,\,4,\,4)$.

Ορισμός. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του $m\times n$ πίνακα A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος ονομάζεται ***χώρος στηλών*** του A, και συμβολίζεται $\mathcal{R}(A)$.

Πρέπει να δείξουμε οτι πράγματι $\mathcal{R}(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Η απόδειξη είναι απλή γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος.

Παρατηρούμε οτι $b \in \mathcal{R}(A)$ εάν και μόνον εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση. Πράγματι οι συνιστώσες του διανύσματος x είναι ακριβώς οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού των στηλών του A που δίδει το b.

Εάν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός $m\times m$ και μή ιδιόμορφος, έχουμε δει οτι η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b, και συνεπώς ο χώρος στηλών είναι όλο το $\mathbb{R}^m$.

Παράδειγμα 2.3 Εξετάζουμε την εξίσωση $Ax = 0$. Προφανώς $x = 0$ είναι μια λύση. Εάν x_1 και x_2 είναι δύο λύσεις της εξίσωσης, τότε

$$A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 \quad \text{και } A(\lambda x_1) = \lambda A x_1 = 0\,.$$

Αρα το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $Ax = 0$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Εάν A είναι $m\times n$ πίνακας, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $Ax = 0$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, ο οποίος ονομάζεται ***μηδενόχωρος*** του A, και συμβολίζεται $\mathcal{N}(A)$.

Στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

η μόνη λύση είναι $(u,\,v) = (0,\,0)$. Αρα $\mathcal{N}(A) = \{0 \in \mathbb{R}^2\}$.

Στον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, η τρίτη στήλη είναι το άθροισμα των άλλων δύο. Αρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ο γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Δηλαδή κάθε πολλαπλάσιο του $(1,\,1,\,-1)$ είναι λύση του $Bx = 0$, και

$$\mathcal{N}(A) = \{\lambda(1,\,1,\,-1)\,|\,\lambda \in \mathbb{R}\}$$

.

***Άσκηση* 2.1** Ελέγξτε εάν τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους ή όχι.

α′. $3x + y = 0$ β′. $3(x + 2) = 5y$
γ′. $3(x + 2) - 5y = 6$ δ′. $x^2 + y^2 = 0$

Άσκηση 2.2 Βρείτε το χώρο στηλών και το μηδενόχωρο του πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους

Η περίπτωση συστημάτων m εξισώσεων με n αγνώστους για $m \neq n$, λύνεται πάλι με απαλοιφή, εμφανίζονται όμως περισσότερες δυνατότητες. Στην αρχή εξετάζουμε, με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, τη διαδικασία της απαλοιφής σε ένα 3×4 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Στην πρώτη γραμμή έχουμε μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη στήλη, το οποίο χρησιμοποιούμε ως οδηγό. Αφαιρούμε δύο φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη, και προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Στη δεύτερη στήλη δεν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο κάτω από την πρώτη γραμμή, άρα δεν μπορούμε να βρούμε οδηγό με εναλλαγή γραμμών. Συνεχίζουμε στην τρίτη στήλη, όπου υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο στη δεύτερη γραμμή, ο δεύτερος οδηγός. Αφαιρούμε δύο φορές τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην τέταρτη στήλη δεν υπάρχει οδηγός. Στη γενική περίπτωση μπορεί να χρειάζεται να κάνουμε εναλλαγή γραμμών για να φέρουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού. Καταλήγουμε σε ένα πίνακα στην ακόλουθη μορφή, η οποία ονομάζεται κλιμακωτή.

- Οι γραμμές με μή μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν) εμφανίζονται πάνω από τις γραμμές που έχουν μόνο μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν).

- Το πρώτο μή μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής (εάν υπάρχει) ονομάζεται **οδηγός**. Ο οδηγός κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού της προηγούμενης γραμμής.

Συμπεραίνουμε οτι στα αριστερά και κάτω από κάθε οδηγό υπάρχουν μόνο μηδενικά. Εάν καταγράψουμε τα αντίστροφα των βημάτων της απαλοιφής, παίρνουμε ένα κάτω τριγωνικό $m \times m$ πίνακα. Στο παράδειγμα έχουμε, για τον αντίστροφο του πρώτου βήματος της απαλοιφής

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ενώ για το αντίστροφο του δεύτερου βήματος

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αρα $A = E^{-1}F^{-1}U = LU$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτή η περιγραφή περιλαμβάνει και την περίπτωση τετραγωνικού πίνακα, καθώς η τριγωνική μορφή που παίρνουμε από την απαλοιφή ενός μή ιδιόμορφου πίνακα είναι ειδική περίπτωση της κλιμακωτής μορφής. Συνεπώς το επόμενο Θεώρημα, του οποίου θα δώσουμε πιό προσεκτική απόδειξη, περιλαμβάνει και τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Θεώρημα 2.1 *Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A αντιστοιχεί*

1. *ένας $m \times m$ πίνακας μεταθέσεων P,*
2. *ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας L, με 1 στη διαγώνιο, και*
3. *ένας $m \times n$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή U*

τέτοιοι ώστε

$$PA = LU.$$

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος πρέπει να ορίσουμε με κατάλληλο τρόπο ένα γενικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό όπου επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις γραμμές του πίνακα.

Ορισμός. Ενας $m \times n$ πίνακας $U = [a_{ij}]$ είναι σε ***κλιμακωτή μορφή*** εάν υπάρχει ένας ακέραιος r (ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα), με $0 \le r \le m$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r$ υπάρχουν ακέραιοι $j_i \le n$ (η θέση του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου της γραμμής i) τέτοιοι ώστε

1. $j_1 \ge 1$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r-1$, $j_{i+1} > j_i$.
2. Για κάθε $i = 1, \ldots, r$, $a_{ik} = 0$ για $k < j_i$.
3. $a_{ij_i} \neq 0$, και ονομάζεται ***οδηγός*** στη γραμμή i και στη στήλη j_i.
4. Εάν για $i > r$, $a_{ik} = 0$ για κάθε k.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{rj_r} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Η διαδικασία της απαλοιφής προχωρά στήλη–στήλη, άρα χρειαζόμαστε μια περιγραφή της κλιμακωτής μορφής κατά στήλες. Εξετάστε προσεκτικά τις δύο περιγραφές και βεβαιωθείτε οτι σε κάθε περίπτωση περιγράφουν την ίδια μορφή.

Εάν $U = [a_{ij}]$ είναι πίνακας σε κλιμακωτή μορφή, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ υπάρχουν ακέραιοι i_j (η θέση του τελευταίου μη μηδενικού στοιχείου της στήλης j) με $i_j \leq r$, τέτοιοι ώστε

1. $0 \leq i_1 \leq 1$ και για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$, $i_j \leq i_{j+1} \leq i_j + 1$.
2. $a_{ij} = 0$ για $i > i_j$, και εάν $i_j > i_{j-1}$ τότε $a_{i_j j} \neq 0$.

Ο αριθμός i_j μετράει πόσοι οδηγοί υπάρχουν στις στήλες από 1 έως j.

Απόδειξη. Πρώτα περιγράφουμε αναδρομικά τη διαδικασία της απαλοιφής, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς i_j. Θέτουμε $i_0 = 0$, $U_0 = A$, και υποθέτουμε οτι για k με $n > k \geq 0$ έχουμε πίνακα U_k και ακεραίους $i_0, \ldots, i_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες. Θεωρούμε τη στήλη $k+1$ του πίνακα U_k.

- Εάν $a_{i(k+1)} = 0$ για κάθε $i > i_k$, θέτουμε $i_{k+1} = i_k$ και $U_{k+1} = U_k$.
- Διαφορετικά, βρίσκουμε το μικρότερο i για το οποίο $i > i_k$ και $a_{i(k+1)} \neq 0$. Για αυτό το i, εναλλάσσουμε τις γραμμές $i_k + 1$ και i του πίνακα U_k, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τον U_k από τα αριστερά με τον πίνακα $P_{(i_k+1)i}$. Αριθμούμε ξανά τις γραμμές του νέου πίνακα, και συμβολίζουμε τα στοιχεία του με a_{ij}. Για κάθε ℓ με $m \geq \ell > i_k + 1$, πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με το στοιχειώδη πίνακα που αφαιρεί $\frac{a_{\ell(k+1)}}{a_{(i_k+1)(k+1)}}$ φορές τη γραμμή $i_k + 1$ από τη γραμμή ℓ. Τέλος θέτουμε $i_{k+1} = i_k + 1$ και U_{k+1} ίσο με το τελικό γινόμενο.

Οταν εξαντλήσουμε όλες τις στήλες, καταλήγουμε με τον πίνακα $U = U_n$, ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Εάν συμβολίσουμε $P_1, \ldots, P_r$ τους πίνακες εναλλαγής που χρησιμοποιούμε στα r μη τετριμμένα βήματα της διαδικασίας απαλοιφής, και $L_1, \ldots, L_r$ τους αντίστοιχους κάτω τριγωνικούς πίνακες, έχουμε

$$U = L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \ldots L_1 P_1 A\,.$$

Για να καταλήξουμε οτι $LU = PA$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και P είναι πίνακας μεταθέσεως, αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε $i = 2, \ldots, r$,

$$(P_r P_{r-1} \cdots P_{i+1} P_i) L_{i-1} = L'(P_r P_{r-1} \cdots P_{i+1} P_i)\,,$$

όπου L' είναι επίσης κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο.

Παρατηρούμε οτι ο L_{i-1} αφαιρεί πολλαπλάσια της $i-1$ γραμμής από τις πιό κάτω γραμμές, δηλαδή είναι της μορφής

$$L_{i-1} = \begin{bmatrix} I_{i-1} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ B & \vdots & I_{m-i+1} \end{bmatrix}$$

ενώ $P_r \cdots P_i$ είναι μια μετάθεση R των γραμμών $i, \ldots, m$, άρα

$$P_r \cdots P_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R \end{bmatrix}$$

ενώ

$$(P_r \cdots P_i)^{-1} = P_i \cdots P_r = \begin{bmatrix} I_{i-1} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός σε μπλοκ δίδει τον πίνακα

$$L' = (P_r \cdots P_i)L_{i-1}(P_i \cdots P_r) = \begin{bmatrix} I_{i-1} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ RB & \vdots & I_{m-i+1} \end{bmatrix},$$

ο οποίος είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο.

□

Οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

Για αν βρούμε τις λύσεις του συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους, εξετάζουμε πρώτα την ***ομογενή*** περίπτωση: όταν στη δεξιά πλευρά έχουμε το μηδενικό διάνυσμα.

$$Ax = 0.$$

Από το Θεώρημα έχουμε $A = (P^{-1}L)U$, και εφόσον $P^{-1}L$ είναι αντιστρέψιμος, $Ax = 0$ εάν και μόνον εάν

$$Ux = 0.$$

Αυτό το σύστημα έχει πάντα μία τουλάχιστον λύση, την $x = 0$. Μας ενδιαφέρει να δούμε πόσες άλλες λύσεις έχει. Στο παράδειγμα 2.1,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λύνουμε με ανάδρομη αντικατάσταση:

- από τη δεύτερη γραμμή $3w + y = 0$, και συνεπώς $w = -\frac{1}{3}y$.
- αντικαθιστώντας το w στην πρώτη γραμμή έχουμε $u + 3v - y + 2y = 0$, και συνεπώς $u = -3v - y$.

Δηλαδή μπορούμε να δώσουμε οτι τιμή θέλουμε στις μεταβλητές v και y, και η γενική λύση είναι

$$(-3v - y,\, v,\, -\frac{1}{3}y,\, y).$$

Είναι χρήσιμο, άν και κάπως αυθαίρετο, να διακρίνουμε τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς: τις ονομάζουμε ***βασικές μεταβλητές***, ενώ τις υπόλοιπες, που αντιστοιχούν σε στήλες χωρίς οδηγούς, τις ονομάζουμε ***ελεύθερες μεταβλητές***. Στο παράδειγμά μας οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι v και y, και η λύση μπορεί να γραφεί

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι κάθε διάνυσμα που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(-3,\,1,\,0,\,0)$ και $(-1,\,0,\,-\frac{1}{3},\,1)$ ανήκει στο μηδενόχωρο του πίνακα A.

Θα δείξουμε ότι γενικότερα, για έναν $m \times n$ πίνακα, υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων με πλήθος ίσο με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, τέτοιο ώστε κάθε διάνυσμα του μηδενόχωρου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων.

Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από τις μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U. Δίνουμε την τιμή 1 σε μία από τις ελεύθερες μεταβλητές, την τιμή 0 στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές, και λύνουμε το σύστημα για να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των βασικών μεταβλητών. Με αυτόν τον τρόπο για κάθε ελεύθερη μεταβλητή έχουμε ένα διάνυσμα που ικανοποιεί την εξίσωση $Ux = 0$, συνεπώς και την εξίσωση $Ax = 0$.

Θα δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα του μηδενόχωρου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων. Συμβολίζουμε τις μεταβλητές του συστήματος $x_1, \ldots, x_n$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν k ελεύθερες μεταβλητές, οι $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

Συμβολίζουμε $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ τα διανύσματα που προκύπτουν με τον πιο πάνω τρόπο. Στο παράδειγμά μας ελεύθερες μεταβλητές είναι οι $x_2 = v$ και $x_4 = y$, και τα αντίστοιχα διανύσματα είναι τα

$$v_2 = (-3,\,1,\,0,\,0)\,,\; v_4 = (-1,\,0,\,-\frac{1}{3},\,1)\,.$$

Θεωρούμε τώρα ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του μηδενόχωρου,

$$c = (c_1,\,\ldots,\,c_n) \in \mathcal{N}(A)\,.$$

Θα δείξουμε ότι

$$c = c_{i_1} v_{i_1} + c_{i_2} v_{i_2} + \cdots + c_{i_k} v_{i_k}\,.$$

Το διάνυσμα $c-(c_{i_1} v_{i_1} + \cdots + c_{i_k} v_{i_k})$ είναι ένα διάνυσμα που ικανοποιεί την εξίσωση $Ux = 0$, και το οποίο έχει την τιμή 0 σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή. Τότε όμως οι μη μηδενικές γραμμές του U προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο τις τιμές του $c-(c_{i_1} v_{i_1} + \cdots + c_{i_k} v_{i_k})$ στις βασικές μεταβλητές: αυτές είναι επίσης 0. Άρα

$$c - (c_{i_1} v_{i_1} + \cdots + c_{i_k} v_{i_k}) = 0\,.$$

Άσκηση 2.3 Βρείτε το χώρο στηλών και το μηδενόχωρο του πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2.4 Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα και πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, για τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $Ax = 0$. Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος.

Οι λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης

Τώρα εξετάζουμε τη μη ομογενή περίπτωση:

$$Ax = b \quad , \quad b \neq 0\,.$$

Το σύστημα έχει λύσεις εάν και μόνον εάν το b ανήκει στο χώρο στηλών του A. Εάν $b \notin \mathcal{R}(A)$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, και λέμε οτι οι εξισώσεις είναι ***ασύμβατες***. Εάν $b \in \mathcal{R}(A)$, τότε η απαλοιφή και η ανάδρομη αντικατάσταση δίδει τις λύσεις.

Ας εξετάσουμε το παράδειγμα 2.1. Εφαρμόζοντας την απαλοιφή και στη δεξιά πλευρά της

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε οτι εάν $b_3 - 2b_2 + 5b_1 \neq 0$, το σύστημα είναι ασύμβατο. Στο παράδειγμα, ο χώρος των στηλών είναι ακριβώς το επίπεδο των διανυσμάτων (b_1, b_2, b_3) που ικανοποιούν $5b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$. Εάν $b = (1, 5, 5)$, τότε το σύστημα δεν είναι ασύμβατο. Η απαλοιφή το μετατρέπει σε

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οπως και για την ομογενή περίπτωση, μπορούμε να λύσουμε για τις βασικές μεταβλητές ως συναρτήσεις των ελεύθερων μεταβλητών,

$$\begin{aligned} w &= 1 - \frac{y}{3} \\ u &= -2 - y - 3v \end{aligned}$$

Η ***γενική λύση*** είναι της μορφής

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε οτι είναι το άθροισμα μιας ειδικής λύσης, και της γενικής λύσης του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Πράγματι, εάν $Ax_0 = 0$ και $Ax_1 = b$, τότε $A(x_0 + x_1) = 0 + b = b$. Για να βρούμε μια ειδική λύση, μπορούμε να δώσουμε σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές την τιμή 0.

Θεώρημα 2.2 *Η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύσεις εάν και μόνον εάν b ανήκει στο χώρο στηλών του A. Εάν x_1 είναι μία λύση, τότε η γενική λύση $x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}}$ είναι της μορφής*

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}} = x_1 + x_0\,,$$

όπου x_0 είναι μια λύση της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Παρατηρούμε οτι το σύνολο των λύσεων στην περίπτωση $b \neq 0$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος: είναι ο μηδενόχωρος του A 'μετατοπισμένοσ' κατά την ειδική λύση.

Ονομάζουμε ***τάξη του πίνακα*** A τον αριθμό r των οδηγών που εμφανίζονται στην απαλοιφή. Εάν υπάρχουν r οδηγοί, τότε υπάρχουν r βασικές μεταβλητές και $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές. Είναι προφανές οτι ο αριθμός των οδηγών είναι ίσος με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών στον κλιμακωτό πίνακα U.

Εάν $r = n$, τότε δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, συνεπώς ο μηδενόχωρος του A είναι $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$, και εάν υπάρχει κάποια λύση, αυτή είναι μοναδική.

Εάν $r = m$, τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε οτι όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ ανήκουν στο χώρο στηλών του A, και συνεπώς η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b.

Εάν $r = m = n$, τότε έχουμε τετραγωνικό μη ιδιόμορφο πίνακα: η εξίσωση έχει πάντα μία και μοναδική λύση.

Γραμμική Ανεξαρτησία

Για να καταλάβουμε καλύτερα τη σημασία της τάξης ενός πίνακα, χρειαζόμαστε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας. Λέμε οτι ένα σύνολο διανυσμάτων είναι ***γραμμικά εξαρτημένο*** εάν ένα από τα διανύσματα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Το σύνολο των γραμμών του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένο αφού η τρίτη γραμμή είναι ίση με το άθροισμα των δύο άλλων, $(1, 3, 3) = (1, -1, 2) + (0, 4, 1)$. Αυτό έχει ως συνέπεια οτι εάν το δίανυσμα (u, v, w) ικανοποιεί τις δύο πρώτες από τις εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{array}{ccccccc} u & - & v & + & 2w & = & 0 \\ & & 4v & + & w & = & 0 \\ u & + & 3v & + & 3w & = & 0 \end{array} ,$$

τότε ικανοποιεί και την τρίτη.

Ενα σύνολο k διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0, είναι απαραιτήτως γραμμικά εξαρτημένο: εάν $v_1 = 0$ τότε $v_1 = 0v_2 + \cdots + 0v_k$.

Θα δώσουμε ένα πιο συμμετρικό ορισμό της έννοιας της γραμμικής εξάρτησης, όπου δεν διακρίνεται κάποιο από τα διανύσματα.

Ορισμός. Τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι ***γραμμικά εξαρτημένα*** εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές $c_1, \ldots, c_n$, *οι οποίοι δεν είναι όλοι μηδέν*, τέτοιος ώστε

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k = 0\,.$$

Αυτό σημαίνει οτι εάν A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ τότε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει λύσεις $x = (c_1, \ldots, c_n)$ διαφορετικές από το $0 \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ***γραμμικά ανεξάρτητα*** εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή εάν ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_k$ που είναι ίσος με μηδέν, είναι ο τετριμμένος, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0. Σε αυτή τη περίπτωση η μοναδική λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$ είναι η $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 2.4 Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν δεν είναι συγγραμμικά. Εάν $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, αλλά δεν υπάρχει c τέτοιο ώστε $v_1 = cv_2$ ή $v_2 = cv_1$, τότε $c_1 = c_2 = 0$.

Παράδειγμα 2.5 Τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 6, -3)$, $v_3 = (3, 9, 3)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, γιατί το δεύτερο είναι πολλαπλάσιο του πρώτου. Ετσι $-3v_1+v_2+0v_3 = 0$.

Παράδειγμα 2.6 Τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 4, -3)$, $v_3 = (1, 4, -1)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, γιατί $4v_1 - v_2 - v_3 = 0$.

Συνεπώς, για να ελέγξουμε εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, σχηματίζουμε τον $m \times n$ πίνακα με στήλες $v_1, \ldots, v_n$. Εάν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $c = (c_1, \ldots, c_n)$ τέτοιο ώστε $Ac = 0$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Εάν η μοναδική λύση της $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη, $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ειδικότερα, οι στήλες ενός τριγωνικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι διαφορετικά από το 0.

Πρόταση 2.3 *Σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, οι μη μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει για τις στήλες που περιέχουν οδηγούς.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα $m \times n$ πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, με r μη μηδενικές γραμμές, και οδηγούς στις στήλες $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Συμβολίζουμε U τον $r \times n$ πίνακα που αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές, και $c = (c_1, \ldots, c_r)$ ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε $c^T U = 0$. Θέλουμε να δείξουμε οτι $c = 0$.

Εξετάζουμε τη στήλη j_1. Το στοιχείο $a_{1j_1} \neq 0$, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι 0. Αρα $c_1 a_{1j_1} = 0$ και συνεπώς $c_1 = 0$.

Υποθέτουμε τώρα οτι $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, για $k < r$, και θα δείξουμε οτι $c_{k+1} = 0$.

Εξετάζουμε τη στήλη j_{k+1}. Το στοιχείο $a_{(k+1)j_{k+1}} \neq 0$, ενώ για $p > k + 1$, $a_{pj_{k+1}} = 0$. Αρα $c_{k+1} a_{(k+1)j_{k+1}} = 0$ και συνεπώς $c_{k+1} = 0$.

Για να αποδείξουμε οτι οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εξετάζουμε λύσεις της εξίσωσης $Ux = 0$ για τις οποίες όλες οι ελεύθερες μεταβλητές είναι 0. Η ανάδρομη αντικατάσταση τότε δίδει τη μοναδική λύση $x = 0$.

□

Παραγωγή Υπόχωρου

Ο χώρος στηλών ενός πίνακα είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποτελείται από τα διανύσματα που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πίνακα. Λέμε οτι ο χώρος στηλών είναι ο υπόχωρος που *παράγεται* από τις στήλες του πίνακα.

Ορισμός. Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$ ***παράγουν*** τον υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}^n$ εάν

1. $w_j \in V$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και

2. Κάθε διάνυσμα του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_k$, δηλαδή για κάθε $v \in V$ υπάρχουν αριθμοί $c_1, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε $v = c_1w_1 + \cdots + c_kw_k$.

Γενικότερα, ένα σύνολο διανυσμάτων $S \subseteq V$ παράγει τον υπόχωρο V εάν κάθε διάνυσμα του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του S.

Παράδειγμα 2.7 Τα διανύσματα $(1, 0)$, $(1, 1)$ και $(-1, 0)$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$. Ποιά δύο από αυτά τα διανύσματα παράγουν το $\mathbb{R}^2$; Ποιά δύο από αυτά τα διανύσματα δεν παράγουν το $\mathbb{R}^2$;

Παράδειγμα 2.8 Η έκφραση ως γραμμικός συνδυασμός δεν είναι, εν γένει, μοναδική. Εκφράστε το διάνυσμα $(-1, 2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω διανυσμάτων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 2.9 Τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$ (οι στήλες του ταυτοτικού πίνακα) παράγουν το $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ δίδεται από το γραμμικό συνδυασμό

$$b_1e_1 + \cdots + b_ne_n\,.$$

Λήμμα 2.4 *Θεωρούμε τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $w_1, \ldots, w_k$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Ορισμός. Θεωρούμε τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$. Ο υπόχωρος που ***παράγεται*** από τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $w_1, \ldots, w_k$.

Ορισμός. ***Βάση*** ενός διανυσματικού υπόχωρου $V \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ το οποίο

1. Παράγει τον υπόχωρο V και
2. Είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λήμμα 2.5 *Εάν $w_1, \ldots, w_k$ είναι βάση του γραμμικού υπόχωρου V, τότε κάθε στοιχείο του V εκφράζεται* με μοναδικό τρόπο *ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_k$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $w_1, \ldots, w_k$ είναι βάση του V, και οτι

$$b = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k = c_1w_1 + \cdots + c_kw_k\,.$$

Τότε $(a_1-c_1)w_1+\cdots+(a_k-c_k)w_k = 0$, και αφού τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού που παριστάνει το 0 είναι όλοι ισοι με 0.

□

Παράδειγμα 2.10 Η ***κανονική*** βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η βάση $e_1, \ldots, e_n$, η οποία αποτελείται από τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα. Όμως η βάση αυτή δεν είναι κατά κανένα τρόπο μοναδική. Οι *στήλες κάθε αντιστρέψιμου $n \times n$ πίνακα* αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 2.11 Οι στήλες ενός κλιμακωτού πίνακα δεν είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητες, αλλά παράγουν το χώρο στηλών. Ο *στήλες που περιέχουν τους οδηγούς* αποτελούν μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα. Θα το δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.12 Θεωρούμε τον κλιμακωτό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι οι (1, 0, 0) και (3, 3, 0). Ελέγχουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες: από την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

έχουμε $c_1 + 3c_2 = 0$ και $3c_2 = 0$, και συνεπώς $c_2 = 0$, $c_1 = 0$.

Για να δείξουμε ότι οι στήλες με οδηγούς παράγουν το χώρο στηλών, αρκεί να ελέγξουμε ότι οι υπόλοιπες στήλες εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών που περιέχουν οδηγούς.

Στον πίνακα U του παραδείγματος, εάν $v_1, \ldots, v_4$ είναι οι στήλες του U, παρατηρούμε ότι οι στήλες v_2 και v_4 εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμόστων v_1 και v_3:

$$v_2 = 3v_1 \quad \text{και} \quad v_4 = \frac{1}{3}v_3 + v_1.$$

Πρόταση 2.6 *Εάν ένας γραμμικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$ έχει μία βάση με k στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του V έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι έχουμε βάσεις $v_1, \ldots, v_k$ και $w_1, \ldots, w_m$ του V.

Αφού τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ αποτελούν βάση, κάθε διάνυσμα w_j εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_i:

$$w_j = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{kj}v_k. \tag{2.2}$$

Θεωρούμε τους πίνακες V και W, με στήλες $v_1, \ldots, v_k$ και $w_1, \ldots, w_m$ αντίστοιχα. Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας του οποίου τα στοιχεία ορίζονται από την 2.2, έχουμε

$$W = V\,A.$$

Ο πίνακας A είναι $k \times m$. Εάν $k < m$, τότε υπάρχει διάνυσμα $c \neq 0$ τέτοιο ώστε $Ac = 0$.

Αλλά τότε

$$W\,c = V\,A\,c = V\,0 = 0\,,$$

και συνεπώς οι στήλες του W δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα η υπόθεση $k < m$ δεν μπορεί να ισχύει αφού W είναι βάση. Παρόμοια δείχνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η υπόθεση $k > m$, και συνεπώς έχουμε $k = m$.

□

Ορισμός. Ο αριθμός των στοιχείων της βάσης ενός γραμμικού υπόχωρου V του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ***διάσταση*** του V, και συμβολίζεται $\dim V$.

Παράδειγμα 2.13 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση n: η κανονική βάση έχει n στοιχεία.

Παράδειγμα 2.14 Ο υπόχωρος $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 3x\}$ αποτελείται από τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0\,.$$

Για να βρούμε μία βάση του υπόχωρου V, τον θεωρούμε ως το μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Εδώ ο πίνακας έχει μόνο μία γραμμή, η οποία περιέχει τον οδηγό, 3. Άρα η τάξη του πίνακα είναι 1, και έχουμε δύο ελεύθερες μεταβλητές. Μία βάση του μηδενόχωρου έχει δύο στοιχεία (όσες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές), και συνεπώς η διάσταση του V είναι 2. Όπως γνωρίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία, το σύνολο V παριστάνει ένα επίπεδο στο χώρο.

Προσέξτε ότι η διάσταση αναφέρεται στον υπόχωρο V, και όχι στα μεμονομένα διανύσματα του V. Κάθε στοιχείο v του V έχει 3 συντεταγμένες, πράγμα που σημαίνει ότι ανήκει στο $\mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$. Έτσι το διάνυσμα $v = (1, 3, 2)$ είναι στοιχείο του χώρου V ο οποίος έχει διάσταση 2, και του χώρου $\mathbb{R}^3$ ο οποίος έχει διάσταση 3. Αλλά το v είναι επίσης στοιχείο του χώρου $W = \{(t, 3t, 2t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$, ο οποίος έχει διάσταση 1.

Άσκηση 2.5 Εξετάστε εάν είναι ανεξάρτητα τα διανύσματα:
α΄) (0, 1), (1, 1)
β΄) (1, 1), (0, 1), (1, 0)
γ΄) (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)

Άσκηση 2.6 Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα:
α΄) (0, 1), (1, 1)
β΄) (1, 1), (−1, −1)
γ΄) (1, 1), (0, 1), (1, 0)

Άσκηση 2.7 α΄) Αποφασίστε εάν τα ακόλουθα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι, λύνοντας ένα κατάλληλο σύστημα $Ax = 0$.

$$(1,\,1,\,0,\,0) \quad , \quad (1,\,0,\,1,\,0) \quad , \quad (0,\,0,\,1,\,1) \quad , \quad (0,\,1,\,0,\,1)\,.$$

β΄) Ελέγξτε εάν το διάνυσμα (0, 0, 0, 1) βρίσκεται στο χώρο που παράγουν τα παραπάνω διανύσματα.

Οι τέσσερις Θεμελιώδεις Υπόχωροι ενός πίνακα.

Έχουμε ήδη δεί το μηδενόχωρο και το χώρο στηλων ενός πίνακα A. Θα ορίσουμε άλλους δύο χώρους, οι οποίοι προκύπτουν από τον A, έτσι ώστε για κάθε $m \times n$ πίνακα A να έχουμε τέσσερις υπόχωρους:

- Ο ***χώρος στηλών*** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται από τις στήλες του A, και συμβολίζεται
$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$
- Ο ***μηδενόχωρος*** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, και συμβολίζεται
$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Ο ***χώρος γραμμών*** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές του A. Προφανώς συμπίπτει με το χώρο στηλών του ανάστροφου πίνακα A^T, και συμβολίζεται
$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Ο ***αριστερός μηδενόχωρος*** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της εξίσωσης $y^T A = 0$. Συμπίπτει με το μηδενόχωρο του ανάστροφου πίνακα A^T, αφού $y^T A = A^T y$, και συμβολίζεται
$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m \,.$$

Θα μελετήσουμε καθένα από αυτούς τους χώρους: θα βρούμε τη διάσταση τους, και θα περιγράψουμε βάσεις, χρησιμοποιώντας τον πίνακα A και τον κλιμακωτό πίνακα U που προκύπτει μετά την απαλοιφή.

Επιστρέφουμε στο παράδειγμα 2.1 και θεωρούμε ταυτοχρόνως τους πίνακες A και U:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος γραμμών του A, $\mathcal{R}(A^T)$

Για ένα κλιμακωτό πίνακα U εύκολα βλέπουμε ότι ο χώρος γραμμών έχει ως βάση τις μη μηδενικές γραμμές του U: στην Πρόταση 2.3 δείξαμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και παράγουν όλο το χώρο αφού οι μηδενικές γραμμές δεν συνεισφέρουν τίποτα περισσότερο. Η σημαντική παρατήρηση είναι οτι ο χώρος γραμμών του A είναι ίδιος με το χώρο γραμμών του U.

Λήμμα 2.7
$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T) \,.$$

Απόδειξη. Κάθε γραμμή του U προκύπτει από γραμμικούς συνδυασμούς των γραμμών του A. (Στο παράδειγμα, η 2η γραμμή του U είναι η 2η γραμμή του A μείον το διπλάσιο της 1ης γραμμής του A.) Άρα και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός γραμμών του U μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός γραμμών του A. Άρα ο χώρος γραμμών του U περιέχεται στο χώρο γραμμών του A:
$$\mathcal{R}(U^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T) \,.$$

Αλλά αφού η διαδικασία της απαλοιφής είναι αντιστρέψιμη κάθε γραμμή του A μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του U. (Στο παράδειγμα, η 2η γραμμή του A είναι η 2η γραμμή του U συν το διπλάσιο της 1ης γραμμής του U.)

Άρα ο χώρος γραμμών του U περιέχεται στο χώρο γραμμών του A:
$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(U^T) \,.$$

Συμπεραίνουμε ότι
$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T) \,.$$

□

Ως βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μη μηδενικές γραμμές του U. Το πλήθος αυτών είναι ισο με την τάξη r του πίνακα. Συμπεραίνουμε ότι η διάσταση του χώρου γραμμών είναι ίση με την τάξη του πίνακα:

$$\dim \mathcal{R}(A^T) = r\,.$$

Μπορούμε να βρούμε μία βάση του χώρου γραμμών που να αποτελείται από γραμμές του A. Εάν όμως έχουν υπάρξει εναλλαγές γραμμών στην απαλοιφή Gauss, οι r πρώτες γραμμές του πίνακα A μπορεί να μην είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Καταγράφουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.8 *Ο χώρος γραμμών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη του πίνακα,*

$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A^T) = r$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του αντίστοιχου κλιμακωτού πίνακα U.

Ο μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A)$.

Έχουμε δει ότι ο μηδενόχωρος του A είναι ίσος με το μηδενόχωρο του U (αυτός ακριβώς είναι ο λόγος που η απαλοιφή Gauss χρησιμοποιείται για την λύση του συστήματος $Ax = 0$). Έχουμε δει επίσης ότι για κάθε ελεύθερη μεταβλητή $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ μπορούμε να βρούμε διανύσματα $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ τα οποία παράγουν το μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$. Το διάνυσμα v_{i_j} έχει την τιμή 1 στην ελεύθερη μεταβλητή x_{i_j}, και την τιμή 0 στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές. Συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς ότι αποτελούν βάση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(A)$. Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, $k = n - r$.

Πρόταση 2.9 *Ο μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών,*

$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A) = n - r\,.$$

Ο χώρος στηλών του A, $\mathcal{R}(A)$.

Στην περίπτωση του χώρου στηλών, η σχέση του $\mathcal{R}(A)$ με τον $\mathcal{R}(U)$ δεν είναι τόσο απλή. Από το παράδειγμα είναι προφανές ότι ο $\mathcal{R}(A)$ δεν είναι ο ίδιος με τον $\mathcal{R}(U)$.

Άσκηση 2.8 Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathcal{R}(A)$ του παραδείγματος που δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(U)$.

Το ακόλουθο Λήμμα περιγράφει τη σχέση μεταξύ των στηλών του A και των στηλών του U.

Λήμμα 2.10 *Ένα σύνολο στηλών του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν το αντίστοιχο σύνολο στηλών του U είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Εάν A' είναι ο πίνακας που παίρνουμε από ένα υποσύνολο των στηλών του A, και U' ο πίνακας από τις αντίστοιχες στήλες του U, τότε

$$A' = P^{-1} L U'$$

και, αφού ο πίνακας $P^{-1} L$ είναι αντιστρέψιμος, ένα διάνυσμα x ικανοποιεί την εξίσωση $A'x = 0$ ένα και μόνον εάν ικανοποιεί την εξίσωση $U'x = 0$.

Εάν οι στήλες του U' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η μοναδική λύση του $U'x = 0$ είναι η $x = 0$, και συνεπώς η μοναδική λύση του $A'x = 0$ είναι η $x = 0$. Συνεπώς οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Οι συνεπαγωγές ισχύουν και αντίστροφα: εάν οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το ίδιο ισχύει για τις στήλες του U'.

□

Γνωρίζουμε ότι οι r στήλες που περιέχουν οδηγούς αποτελούν βάση του $\mathcal{R}(U)$. Συνεπώς οι αντίστοιχες r στήλες $j_1, \ldots, j_r$ του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εάν η διάσταση του $\mathcal{R}(A)$ ήταν μεγαλύτερη από r, τότε θα υπήρχε κάποια άλλη στήλη του A η οποία, μαζί με τις $j_1, \ldots, j_r$ θα αποτελούσε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Αλλά τότε οι αντίστοιχες $r+1$ στήλες του U θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητες, που δεν μπορεί να συμβεί, αφού η διάσταση του $\mathcal{R}(U)$ είναι r. Συνεπώς οι στήλες $j_1, \ldots, j_r$ παράγουν το $\mathcal{R}(A)$ και αποτελούν βάση του.

Πρόταση 2.11 *Ο χώρος στηλών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη r του πίνακα,*

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A) = r\,.$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από τις στήλες που αντιστοιχούν στις στήλες του κλιμακωτού πίνακα U που περιέχουν οδηγούς.

Συνέπεια των Προτάσεων 2.8 και 2.11 είναι το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.12 *Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A, το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A είναι ίσο με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A.*

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A^T)$.

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A είναι ο μηδενόχωρος του ανάστροφου πίνακα A^T. Γνωρίζουμε οτι η διάσταση του μηδενόχωρου ενός πίνακα είναι το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, που είναι ίσο με το πλήθος όλων των μεταβλητών μείον το πλήθος των βασικών μεταβλητών. Για τον πίνακα A^T, το πλήθος όλων των μεταβλητών είναι m (όσες είναι οι στήλες του A^T, δηλαδή όσες είναι οι γραμμές του A). Το πλήθος των βασικών μεταβλητών του A^T είναι ίσο με την τάξη του r, από το Θεώρημα 2.12. Συνεπώς το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών του A^T είναι $m - r$, και

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r\,.$$

Για να περιγράψουμε τα διανύσματα y που ικανοποιούν $y^T A = 0$, εξετάζουμε την παραγοντοποίηση

$$P\,A = L\,U\,.$$

Ο L είναι αντιστρέψιμος, και έχουμε

$$L^{-1}\,P\,A = U\,.$$

Η i γραμμή του U είναι το γινόμενο της i γραμμής του $L^{-1}P$ με τον πίνακα A. Οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του U είναι ίσες με το μηδέν. Άρα οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ είναι διανύσματα του αριστερού μηδενόχωρου του A. Αφού ο πίνακας $L^{-1}P$ είναι αντιστρέψιμος, οι γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathcal{N}(A^T)$, ο οποίος έχει διάσταση $m-r$, και συνεπώς αποτελούν μία βάση του χώρου.

Πρόταση 2.13 *Ο αριστερός μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση $m-r$,*

$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$$

Μία βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ αποτελείται από τις $m-r$ τελευταίες γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ της απαλοιφής Gauss.

Άσκηση 2.9 Βρείτε μια βάση του χώρου στηλών του

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.10 Βρείτε τη διάσταση, και κατασκευάστε μια βάση των τεσσάρων υποχώρων που σχετίζονται με κάθε ένα από τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$