ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Διάλεξη 1. Κατά σημείο σύγκλιση.

Γ. Κωστάκης.

Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε συνάρτηση $f_n : I \to \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) (ορισμένη) στο I.

Ορισμός 1 *Λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ορισμένη σ'ενα διάστημα I συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$* **κατά σημείο** *στο I αν για κάθε $x \in I$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ή ισοδύναμα αν για κάθε $x \in I$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(x, \epsilon)$ (που εξαρτάται από τα ϵ, x) ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και γράφουμε συνοπτικά: $f_n \to f$ κατά σημείο στο I.*

Πολλές φορές αντί να πούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ορισμένη σ'ενα διάστημα I συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ **κατά σημείο** στο I λέμε απλά ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει **κατά σημείο** στο I. Παρατηρήστε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει **κατά σημείο** στο I αν και μόνον αν η ακολουθία των πραγματικών αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει (εννοείται σε πραγματικό αριθμό) για κάθε $x \in I$.

Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παραδείγματα.

1. Αν $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$ τότε $f_n(x) = x^n \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$ και $f_n(1) = 1 \to 1$. Άρα η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο $[0, 1]$, όπου $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0, 1)$ και $f(1) = 1$.

2. Αν $f_n(x) = nx^n$, $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$ τότε $f_n(x) = nx^n \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$ και $f_n(1) = n \to +\infty$. Άρα η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) δεν συγκλίνει κατά σημείο σε καμία συνάρτηση στο $[0, 1]$. Από την άλλη μεριά, η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά σημείο στο $[0, a]$, για κάθε $a \in (0, 1)$.

3. Έστω $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$. Αν $x \in [0, 1)$ τότε $x^n \to 0$ και άρα $f_n(x) \to 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι $f_n(1) = 1/2 \to 1/2$. Τέλος, για $x > 1$ έχουμε $1/x^n \to 0$ και άρα

   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} = \frac{x^n}{x^n(1 + x^{-n})} = \frac{1}{1 + x^{-n}} \to 1 \text{ για } x > 1.$$

   Επομένως η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στη συνάρτηση f κατά σημείο στο $[0, +\infty)$, όπου $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in [0, 1) \\ 1/2 & \text{αν} \quad x = 1 \\ 1 & \text{αν} \quad x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

4. Για $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in [0, 1) \\ nx - n & \text{αν} \quad x \in [1, 1 + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{αν} \quad x \in [1 + \frac{1}{n}, 2]. \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο $[0, 2]$. Είναι χρήσιμο να σχεδιάσετε το γράφημα της f_n γιατί αυτό θα σας αποκαλύψει σε ποιά f η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στο $[0, 2]$. Εμείς θα ακολουθήσουμε τον τυπικό δρόμο. Έστω $x \in [0, 2]$. Αν $x \in [0, 1)$ τότε $f_n(x) = 0$ για κάθε n και αν $x = 1$ ή $x = 2$ τότε $f_n(x) = f_n(1) = 0$ ή $f_n(x) = f_n(2) = 1$ για κάθε n, αντίστοιχα. Αν $1 < x < 2$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x > 1 + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, 2]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in [0, 1] \\ 1 & \text{αν} \quad x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Δύο φυσιολογικά ερωτήματα στο πλαίσιο της κατά σημείο σύγκλισης είναι τα ακόλουθα.

Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο I και η ακολουθία (f_n) έχει κάποιες ‘ *καλές ιδιότητες* ’ , κληρονομεί και η f αυτές τις ιδιότητες;

Σέβεται η κατά σημείο σύγκλιση την παραγώγιση και την ολοκλήρωση;

Φυσικά, η έννοια ‘ *καλές ιδιότητες* ’ είναι αφηρημένη και επιπλέον πρέπει να εξηγήσουμε τι εννοούμε όταν ρωτάμε αν η κατά σημείο σύγκλιση σέβεται την παραγώγιση ή την ολοκλήρωση. Οπότε ας δώσουμε συγκεκριμένο μαθηματικό περεχόμενο σε αυτά, διατυπώνοντας τα παρακάτω

Βασικά Ερωτήματα.

1. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο $I = [0, 1]$ και η f_n είναι συνεχής στο I για κάθε n, είναι σωστό ότι η f είναι επίσης συνεχής στο I; Απάντηση: **Ο**ΧΙ πάντοτε.
2. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο $I = [0, 1]$ και υπάρχουν οι f', f'_n στο I για κάθε n, είναι σωστό ότι $f'_n \to f'$ κατά σημείο στο I; Απάντηση: **Ο**ΧΙ πάντοτε.
3. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο $I = [0, 1]$ και οι f, f_n είναι ολοκηρώσιμες στο I για κάθε n, είναι σωστό ότι $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$; Απάντηση: **Ο**ΧΙ πάντοτε.

Για την αρνητική απάντηση στο Βασικό Ερώτημα 1 αρκεί να παρατηρήσουμε το Παράδειγμα 1. Πράγματι, κάθε $f_n(x) = x^n$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$, $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, 1]$ και η f δεν είναι συνεχής στο 1, αφού μηδενίζεται παντού στο $[0, 1]$ εκτός από το σημείο 1 όπου και παίρνει την τιμή 1.

Ας έρθουμε στο Βασικό Ερώτημα 2. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f_n'(x) = \cos(nx)$, $x \in [0,1]$, αλλά η (f_n') δεν συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση (π.χ. $f_n'(0) = 1$ για κάθε n).

Τέλος, για το Βασικό Ερώτημα 3 ας παρατηρήσουμε ότι $\int_0^1 (n+1)x^n dx = 1$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Οπότε αν ορίσουμε $g_n(x) = (n+1)x^n$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$ τότε κάθε g_n είναι συνεχής στο $[0,1]$, $g_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1)$, $g_n(1) = n+1 \to +\infty$ και $\int_0^1 g_n(x)dx = 1$ για κάθε n. Το πρόβλημα είναι ότι η ακολουθία (g_n) δεν συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,1]$ αφού $g_n(1) = n+1 \to +\infty$. Οπότε ας τροποποιήσουμε την g_n στο σημείο 1 ως εξής. Για κάθε n ορίζουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{αν} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{αν} \quad x = 1. \end{cases}$$

Τότε

- κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ με $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 g_n(x)dx = 1$ (εδώ χρησιμοποιήσαμε το εξής: αν g είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ και h είναι μια συνάρτηση στο $[a,b]$ η οποία ταυτίζεται με την g παντού στο $[a,b]$ εκτός από ένα σημείο τότε η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b h(x)dx$),
- $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$ όπου $f(x) = 0$ αν $x \in [0,1)$ και $f(1) = 1$
- και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ με $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι $1 = \int_0^1 f_n(x)dx \to 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx$.

Ασκήσεις.

1. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο I και $g_n \to g$ κατά σημείο στο I δείξτε ότι
   - $f_n + g_n \to f + g$ κατά σημείο στο I,
   - $\lambda f_n \to \lambda f$ κατά σημείο στο I για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,
   - $f_n g_n \to fg$ κατά σημείο στο I.
2. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1+x^2}{1+x^n}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει κατά σημείο καθώς και τη συνάρτηση στην οποία συγκλίνει η (f_n) κατά σημείο σε κάθε ένα από τα προαναφερθέντα διαστήματα.
3. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Εξετάστε αν η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n(x) = \frac{1+nx}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι η (f_n) συγκλίνει σε μια μη συνεχή συνάρτηση f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

5. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $[0, 1]$ ώστε κάθε f_n δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στο $[0, 1]$ σε μια συνεχή συνάρτηση.

6. Αν $f_n(x) = x^n e^{nx}$, $x \in [0, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, +\infty)$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, \xi]$ για κάποια συνάρτηση $f : [0, \xi] \to \mathbb{R}$ και $f_n(x) \to +\infty$ για κάθε $x > \xi$. Ποιά είναι η f;

7. Αν $f_n(x) = nx^n$, $x \in [0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) με $x_n \in [0, 1)$ για κάθε n ώστε $f_n(x_n) \to +\infty$ (παρόλο που $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$).

8. Δίνεται η συνάρτηση
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{αν} \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$
Βρείτε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (g_n) στο $[0, 2]$ ώστε $g_n \to g$ κατά σημείο στο $[0, 2]$. (Υπόδειξη: κοιτάξτε το Παράδειγμα 4. Παρατηρήστε ότι η f στο Παράδειγμα 4 και η g διαφέρουν μόνο στο σημείο 1.)

9. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in [0, 1) \\ 1 & \text{αν} \quad x \in [1, 2] \\ 2 & \text{αν} \quad x \in (2, 3]. \end{cases}$$
Βρείτε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) στο $[0, 3]$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, 3]$.