ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Διάλεξη 3. Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια.

Γ. Κωστάκης.

Ας θυμηθούμε ότι το κατά σημείο όριο συνεχών συναρτήσεων δεν είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση, δείτε π.χ. το Παράδειγμα 1 της **2ης Διάλεξης**. Από την άλλη μεριά,

η ομοιόμορφη σύγκλιση διατηρεί τη συνέχεια,

δηλαδή, με άλλα λόγια,

το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Ακριβώς αυτό είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 1 *Έστω $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I και η f_n είναι συνεχής στο I για κάθε n. Τότε η f είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα τυχαίο $x_0 \in I$ και θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\epsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Εφόσον $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I υπάρχει θετικός ακέραιος N ώστε

$$\sup_{x \in I} |f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1}$$

Από τη συνέχεια της f_N στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } \ x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \text{ τότε } \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2}$$

Για κάθε $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\le \sup_{s \in I} |f(s) - f_N(s)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \sup_{s \in I} |f_N(s) - f(s)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τις (1), (2), και άρα δείξαμε το ζητούμενο.

Θα δούμε τώρα δύο παραλλαγές που αφορούν στο **Θεώρημα** 1, αν και ουσιαστικά αποτελούν διαδοχικές ισχυροποιήσεις του. Τις αποκαλούμε παραλλαγές επειδή οι βασικές ιδέες για την απόδειξή τους υπάρχουν ήδη στην απόδειξη του **Θεώρηματος** 1.

1η Παραλλαγή του Θεωρήματος 1(εναλλαγή των ορίων): Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I, $x_0 \in I$ και η f_n είναι συνεχής στο x_0 για κάθε n. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Παρατηρήσεις 1**.**

(α) Το συμπέρασμα της **1ης Παραλλαγής του Θεωρήματος 1** είναι ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Δηλαδή,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3}$$

Παρατηρήστε τώρα, από τη μία μεριά, ότι

$$f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)), \tag{4}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f_n(x_0) \to f(x_0)$ στην πρώτη ισότητα από αριστερά και στην επόμενη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι, για κάθε n η f_n είναι συνεχής στο x_0. Από την άλλη μεριά, $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$ ($f_n \to f$ κατά σημείο στο I αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I) και άρα

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)). \tag{5}$$

Επομένως η (3), λόγω των (4), (5), γράφεται ως

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)) = \lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)). \tag{6}$$

Με άλλα λόγια η (6) μας λέει ότι: **η αλλαγή στη σειρά των ορίων είναι επιτρεπτή**, όταν ισχύουν οι υποθέσεις της **1ης Παραλλαγής του Θεωρήματος 1**. Ας προσέξουμε ότι όταν γράφουμε $\lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x))$ σημαίνει ότι πρώτα παίρνουμε το όριο καθώς $x \to x_0$ και μετά παίρνουμε το όριο καθώς $n \to +\infty$.

(β) Θα δούμε τώρα ένα παράδειγμα όπου η εναλλαγή των ορίων δεν ισχύει και φυσικά για να συμβαίνει αυτό, κάποια από τις υποθέσεις της **1ης Παραλλαγής του Θεωρήματος 1** πρέπει να παραβιάζεται. Ορίζουμε

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \;\; x \in [0,1], \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ με $x \neq 0$ έχουμε $\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = 0$. Άρα

$$\lim_{x \to 0^+} (\lim_{n \to +\infty} g_n(x)) = 0$$

και εφόσον $\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = 1$ για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to 0^+} g_n(x)) = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^+}(\lim_{n\to+\infty} g_n(x)) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to 0^+} g_n(x)).$$

Σε αυτό το παράδειγμα ας ελέγξουμε ποια υπόθεση της **1ης Παραλλαγής του Θεωρήματος 1** παραβιάζεται. Παρατηρούμε ότι $g_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in (0,1]$ και $g_n(0) = 1$ για κάθε n. Άρα $g_n \to g$ κατά σημείο στο $[0,1]$, όπου $g(x) = 0$ για $x \in (0,1]$ και $g(0) = 1$. Η g δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$, αφού δεν είναι συνεχής στο 0, ενώ κάθε g_n είναι συνεχής στο $[0,1]$. Συμπεραίνουμε ότι η (g_n) δεν συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $[0,1]$, γιατί, αν συνέβαινε αυτό, τότε από το **Θεώρημα** 1 η g θα ήταν συνεχής στο $[0,1]$, άτοπο. Επομένως, παραβιάζεται η υπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης.

(γ) Παρατηρήστε ότι, κατά τετριμμένο τρόπο, η **1η Παραλλαγή του Θεωρήματος 1** συνεπάγεται το **Θεώρημα 1** και άρα η **1η Παραλλαγή του Θεωρήματος 1** αποτελεί ισχυροποίηση του **Θεωρήματος 1** (όπως ήδη αναφέραμε στα παραπάνω).

Απόδειξη της 1ης Παραλλαγής του Θεωρήματος 1. Ακολουθούμε βήμα προς βήμα την απόδειξη του **Θεωρήματος 1** (παρατηρήστε που και πως χρησιμοποιούμε τη συνέχεια κάθε f_n στο x_0).

2η Παραλλαγή του Θεωρήματος 1(εναλλαγή των ορίων): Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I, $x_0 \in I$ και υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε n το όριο $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, έστω A_n, δηλαδή,

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = A_n, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Τότε η ακολουθία (A_n) συγκλίνει και

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to+\infty} A_n.$$

Παρατηρήσεις 2.

(α) Το συμπέρασμα της **2ης Παραλλαγής του Θεωρήματος 1** γράφεται ως εξής

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)).$$

Επομένως, τα συμπεράσματα των **Παραλλαγών 1 και 2 του Θεωρήματος 1** είναι τα ίδια και αφορούν στην επιτρεπτή εναλλαγή των ορίων.

(β) Η **2η Παραλλαγή του Θεωρήματος 1** συνεπάγεται την **1η Παραλλαγή του Θεωρήματος 1**.

Απόδειξη της 2ης Παραλλαγής του Θεωρήματος 1. Έστω $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε αρχικά ότι η ακολουθία (A_n) συγκλίνει. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι είναι *Cauchy*. Εφόσον η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο I, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, για κάθε $m \geq n_0$ και για κάθε $x \in I$ ισχύει ότι

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Παίρνοντας όριο στην παραπάνω ανισότητα καθώς $x \to x_0$ προκύπτει ότι

$$|A_n - A_m| \leq \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $m \geq n_0$. Άρα η (A_n) είναι *Cauchy* και άρα συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό A. Αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Δηλαδή, θέλουμε να κάνουμε την ποσότητα $|f(x) - A|$ μικρή για x κοντά στο x_0. Αυτό που γνωρίζουμε είναι ότι η f_n είναι κοντά στην f (ομοιόμορφα) στο I τελικά για κάθε n και ότι ο A_n είναι κοντά στον A τελικά για κάθε n. Επομένως, για να εκτιμήσουμε την ποσότητα $|f(x) - A|$ παρεμβάλλουμε, μέσω της τριγωνικής ανισότητας, διαδοχικά τους όρους $f_n(x)$, A_n και έχουμε

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| \tag{7}$$

για κάθε $x \in I$ και κάθε n. Τώρα θα επιλέξουμε κατάλληλο n ώστε ο πρώτος και τρίτος όρος στο δεξί μέλος της (7) να γίνουν κατάλληλα μικροί. Πράγματι, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I και $A_n \to A$ υπάρχει N θετικός ακέραιος ώστε

$$\sup_{s \in I} |f(s) - f_N(s)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ και } |A_N - A| < \frac{\epsilon}{3} \tag{8}$$

(θυμηθείτε ότι έχουμε σταθεροποιήσει ένα $\epsilon > 0$ από την αρχή της απόδειξης). Για να κάνουμε μικρό και τον δεύτερο όρο στο δεξί μέλος της (7) θα χρησιμοποιήσουμε το ότι $\lim_{x \to x_0} f_N(x) = A_N$, όπου το N έχει προσδιοριστεί παραπάνω. Επομένως, από τον ορισμό του ορίου υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \text{ τότε } |f_N(x) - A_N| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{9}$$

Τότε, από την ανισότητα (7) για $n = N$, και λόγω των (8), (9), παίρνουμε ότι

$$|f(x) - A| < \epsilon \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Άρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, το οποίο και θέλαμε να δείξουμε.

Βασική Παρατήρηση. Υποθέτουμε τα εξής: $f_n \to f$ κατά σημείο στο I, κάθε f_n είναι συνεχής στο I και η f δεν είναι συνεχής στο I. Οι παραπάνω υποθέσεις έχουμε ήδη δει ότι ικανοποιούνται σε διάφορα **Παραδείγματα** της **2ης Διάλεξης**. Από το **Θεώρημα 1** συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (f_n) δεν συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο I. Παρατηρήστε ότι αυτός είναι ένας εύκολος τρόπος να αποφανθούμε (αρνητικά) για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων, όταν ικανοποιούνται οι παραπάνω υποθέσεις. Αυτό θα φανεί και στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Τα επόμενα παραδείγματα είναι τα **Παραδείγματα** της **2ης Διάλεξης**. Εδώ θα παρουσιάσουμε έναν δεύτερο τρόπο προσέγγισης (όπου είναι δυνατόν) στο πρόβλημα της ομοιόμορφης σύγκλισης, κάνοντας χρήση του **Θεωρήματος 1**.

Παραδείγματα.

1. Για $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$ ας εξετάσουμε αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Έχουμε $f_n(x) = x^n \to 0$ για κάθε $x \in [0,1)$ και $f_n(1) = 1 \to 1$. Άρα $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0,1)$ και $f(1) = 1$. Αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ τότε αναγκαστικά $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αφού $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$, και εφόσον κάθε f_n είναι συνεχής στο I συμπεραίνουμε, από το **Θεώρημα 1**, ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Καταλήξαμε όμως σε άτοπο, γιατί η f δεν είναι συνεχής στο 1. Άρα η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

2. Έστω $f_n(x) = nx^n$, $x \in [0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Ας εξετάσουμε αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1)$. Έχουμε $f_n(x) = nx^n \to 0$ για κάθε $x \in [0,1)$. Άρα η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,1)$. Παρατηρήστε ότι η μηδενική συνάρτηση στο $[0,1)$ όπως και κάθε f_n είναι συνεχείς στο $[0,1)$. Επομένως, από το **Θεώρημα 1** δεν μπορούμε να εξάγουμε κανένα (αρνητικό) συμπέρασμα σε σχέση με την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στο $[0,1)$ και άρα δουλεύουμε όπως στο αντίστοιχο παράδειγμα της **2ης Διάλεξης**.

3. Έστω $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,+\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$. Αυτό είναι το Παράδειγμα 3 της **1ης Διάλεξης** (καθώς και το Παράδειγμα 3 της **2ης Διάλεξης**). Εκεί δείξαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$, όπου $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in [0,1) \\ 1/2 & \text{αν} \quad x = 1 \\ 1 & \text{αν} \quad x \in (1,+\infty). \end{cases}$$
Θα εξετάσουμε τώρα αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ (π.χ. η f δεν είναι συνεχής στο 1). Εφαρμόζοντας τώρα το **Θεώρημα 1** συμπεραίνουμε ότι η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$ (κοιτάξτε πως εργαστήκαμε στο αντίστοιχο παράδειγμα της **2ης Διάλεξης**, όπου δεν είχαμε στη διάθεσή μας το **Θεώρημα 1**).

4. Για $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ας εξετάσουμε τώρα αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Όπως και στο **Παράδειγμα 2**,

το **Θεώρημα 1**) δεν μας βοηθάει για να αποφανθούμε αν η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,1]$ (γιατί η μηδενική συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0,1]$). Επομένως εργαζόμαστε, αναγκαστικά, όπως στο Παράδειγμα 4 της **2ης Διάλεξης** και καταλήγουμε στο ότι η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Ασκήσεις.

1. (πρόβλημα εναλλαγής ορίων σε διπλές ακολουθίες) Δίνεται η διπλή ακολουθία $a_{n,m} := \frac{n}{n+m}$, $n = 1,2,\ldots$, $m = 1,2,\ldots$. Εξετάστε αν ισχύει ότι
$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} a_{n,m}.$$
(Όταν γράφουμε $\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} a_{n,m}$ σημαίνει ότι πρώτα παίρνουμε όριο καθώς $m \to +\infty$ και μετά όριο καθώς $n \to +\infty$).

2. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n(x) = \frac{1+nx}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$. Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,a)$ (στο ίδιο ακριβώς πρόβλημα έχετε εργαστεί στην άσκηση 4 (ii) της **2ης Διάλεξης**. Τώρα, χρησιμοποιήστε άλλο τρόπο!).

3. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I και υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) ώστε η f_{k_n} είναι συνεχής στο I για κάθε $n = 1,2,\ldots$ δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I.

4. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο (a,b) και υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε n το όριο $\lim_{x\to a^+} f_n(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, έστω A_n, δηλαδή,
$$\lim_{x\to a^+} f_n(x) = A_n, \ \ n = 1,2,\ldots.$$
Τότε η ακολουθία (A_n) συγκλίνει και
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{n\to+\infty} A_n.$$
Ποια είναι η διαφορά με την **2η Παραλλαγή του Θεωρήματος 1**;

5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και ορίζουμε $f_n(x) := f(x^n)$, $x \in [0,1]$, $n = 1,2,\ldots$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Δείξτε ότι $f(0) = f(1)$ (δείτε και την άσκηση 8 της **2ης Διάλεξης**).