ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Διάλεξη 4. Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωση.

Γ. Κωστάκης.

Σε αυτή τη διάλεξη θα δούμε πως συνδέεται η ομοιόμορφη σύγκλιση με την ολοκλήρωση. Ας θυμηθούμε τον ορισμό του ολοκληρώματος *Riemann*.

Έστω $[a,b]$ κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση (δηλαδή, υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$). Για κάθε διαμέριση

$$\mathcal{P}=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

του διαστήματος $[a,b]$ ορίζουμε το άνω άθροισμα $U(f,\mathcal{P})$ και το κάτω άθροισμα $L(f,\mathcal{P})$ της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$ ως εξής:

$$U(f,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),$$

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x).$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για οποιεσδήποτε διαμερίσεις $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$ ισχύει ότι

$$L(f,\mathcal{P})\leq U(f,\mathcal{Q}). \tag{1}$$

Από την (1) προκύπτει ότι

$$\sup_{\mathcal{P}}L(f,\mathcal{P})\leq\inf_{\mathcal{Q}}U(f,\mathcal{Q}).$$

Λέμε ότι η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν

$$\sup_{\mathcal{P}}L(f,\mathcal{P})=\inf_{\mathcal{Q}}U(f,\mathcal{Q})$$

και τότε ορίζουμε τον αριθμό

$$\int_a^b f(x)dx:=\sup_{\mathcal{P}}L(f,\mathcal{P})=\inf_{\mathcal{Q}}U(f,\mathcal{Q}),$$

ο οποίος διαβάζεται: το ολοκλήρωμα (*Riemann*) της f από a έως b.

Διατυπώνουμε τώρα συνοπτικά το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της διάλεξης.

Το ομοιόμορφο όριο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Σημειώνουμε, χωρίς δικαιολόγηση προς το παρόν, ότι το κατά σημείο όριο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων δεν είναι πάντοτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση (δείτε την **Άσκηση** 2). Συνεχίζουμε με την απόδειξη αυτού του κεντρικού αποτελέσματος.

Θεώρημα 1 *Έστω $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και η f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε n. Τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.*

Απόδειξη. Εφόσον $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και κάθε f_n είναι φραγμένη στο $[a,b]$ ως *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, προκύπτει εύκολα ότι η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ (ας μην ξεχνάμε ότι η έννοια της ολοκληρωσιμότητας σε κλειστό και φραγμένο διάστημα ορίζεται για φραγμένες συναρτήσεις). Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό θέτουμε

$$\epsilon_n := \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

και από την υπόθεση έχουμε

$$\epsilon_n \to 0.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon_n$ για κάθε n και για κάθε $x \in [a,b]$. Επομένως

$$f_n(x) - \epsilon_n \le f(x) \le f_n(x) + \epsilon_n$$

για κάθε n και για κάθε $x \in [a,b]$. Από την προηγούμενη ανισότητα και την (1) προκύπτει ότι

$$L(f_n - \epsilon_n, \mathcal{P}) \le L(f, \mathcal{P}) \le U(f, \mathcal{Q}) \le U(f_n + \epsilon_n, \mathcal{Q}), \tag{2}$$

για κάθε n και για οποιεσδήποτε διαμερίσεις $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$. Λαμβάνοντας στην (2) $infimum$ ως προς όλες τις διαμερίσεις $\mathcal{Q}$ και $supremum$ ως προς όλες τις διαμερίσεις $\mathcal{P}$ (του $[a,b]$) και εφόσον κάθε f_n είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, παίρνουμε την ανισότητα

$$\int_a^b (f_n(x) - \epsilon_n)dx \le \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}) \le \inf_{\mathcal{Q}} U(f, \mathcal{Q}) \le \int_a^b (f_n(x) + \epsilon_n)dx, \tag{3}$$

για κάθε n. Από την (3) έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\le \inf_{\mathcal{Q}} U(f, \mathcal{Q}) - \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}) \\ &\le \int_a^b (f_n(x) + \epsilon_n)dx - \int_a^b (f_n(x) - \epsilon_n)dx = 2(b-a)\epsilon_n \end{aligned}$$

για κάθε n και αφού $\epsilon_n \to 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\inf_{\mathcal{Q}} U(f, \mathcal{Q}) = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}),$$

δηλαδή η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επομένως

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_{\mathcal{Q}} U(f, \mathcal{Q}) = \sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P})$$

και η (3) γίνεται

$$\int_a^b (f_n(x) - \epsilon_n)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b (f_n(x) + \epsilon_n)dx$$

ή ισοδύναμα

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b \epsilon_n dx = (b-a)\epsilon_n.$$

Εφόσον $\epsilon_n \to 0$, παίρνουμε όριο καθώς $n \to +\infty$ στην παραπάνω ανισότητα και προκύπτει ότι $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.

Παρατήρηση. Το παραπάνω θεώρημα ουσιαστικά αφορά σε εναλλαγή ορίων. Ας δούμε γιατί. Κατ΄ αρχήν, ας παρατηρήσουμε ότι το συμπέρασμα του **Θεωρήματος** 1 μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Η προηγούμενη ισότητα μας λέει ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά μεταξύ του ορίου και του ολοκληρώματος χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα. Αλλά, αν σκεφτούμε ότι το ολοκλήρωμα δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια οριακή διαδικασία, τότε πράγματι έχουμε επιτρεπτή εναλλαγή ορίων.

Μια άμεση και πολύ χρήσιμη συνέπεια του **Θεωρήματος** 1 είναι το ακόλουθο

Πόρισμα 1 *Έστω $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και η f_n είναι συνεχής στο $[a,b]$ για κάθε n. Τότε $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.*

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε το **Θεώρημα** 1.

Ασκήσεις.

1. Δώστε απ΄ ευθείας απόδειξη του **Πορίσματος** 1 χωρίς να χρησιμοποιήσετε το **Θεώρημα** 1. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το **Θεώρημα** 1 της **3ης Διάλεξης**, δηλαδή ότι, το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.)

2. Ορίζουμε $f_n(x) = \lim_{m\to+\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}$, $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι

   - η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,1]$ σε κάποια συνάρτηση f την οποία να βρείτε,

- κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$,
- η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Επομένως έχουμε ένα παράδειγμα όπου το κατά σημείο όριο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων δεν είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. (Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το παραπάνω όριο καθώς $m \to +\infty$. Βρείτε το $f(x)$ για x ρητό και για x άρρητο.)