ΕΜ 181: Αριθμητική Ανάλυση Ι (Ακαδ. έτος 2004–2005)

Τετάρτη 10 Νοεμβρίου 2004

2η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε ένα τυχαίο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με προκαθορισμένο δείκτη κατάστασης k (ως προς την ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$) είναι ο ακόλουθος:

   ΒΗΜΑ 1 Δημιουργήστε διαγώνιο πίνακα D με στοιχεία $d_{ii} = k^{-(i-1)/(n-1)}$, $i = 1, \ldots, n$, όπου k ένας σταθερός θετικός αριθμός.

   ΒΗΜΑ 2 Θεωρήστε $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έναν τυχαίο ορθογώνιο πίνακα (δηλ. $Q^TQ = I$).

   ΒΗΜΑ 3 Πάρτε ως $A = Q^TDQ$.

   (α′) Αποδείξτε ότι $\kappa_2(A) = k$, όπου $\kappa_2(A)$ είναι ο δείκτης κατάστασης του A ως προς την $\|\cdot\|_2$.

   (β′) Γράψτε ένα πρόγραμμα (σε διπλή ακρίβεια) που να κατασκευάζει τον πίνακα A με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω για δεδομένο k. (Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήστε τον 30×30 ορθογώνιο πίνακα Q που δίνεται στο αρχείο `Qmatr.dat` στην ιστοσελίδα του μαθήματος.) Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τα υποπρογράμματα `DGETRF` και `DGETRS` του LAPACK για να λύσετε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου A είναι ο πίνακας που κατασκευάσατε. Το διάνυσμα b κατασκευάστε το έτσι ώστε η ακριβής λύση του συστήματος $Ax = b$ να είναι $x = (10, 10, \ldots, 10)^T$.

   (γ′) Τρέξτε το πρόγραμμά σας για τις τιμές του $k = 10^6, 10^8, 10^{10}, 10^{12}, 10^{14}, 10^{16}$, και υπολογίστε το σφάλμα $\|x - \widetilde{x}\|_\infty$, όπου x είναι η ακριβής λύση και $\widetilde{x}$ η λύση που δίνει το πρόγραμμά σας. Για να υπολογίσετε την ποσότητα $\|x - \widetilde{x}\|_\infty$ υλοποιήστε τη συνάρτηση:

   ```
   DOUBLE PRECISION FUNCTION VNORM(N,U,V)
   INTEGER N
   DOUBLE PRECISION U(*), V(*)
   ```

   Κάντε μια γραφική παράσταση (χρησιμοποιώντας λογαριθμική κλίμακα) που να απεικονίζει τη συμπεριφορά του σφάλματος ως προς τον δείκτη κατάστασης. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα, αν αποθηκεύσετε τα αποτελέσματά σας σε ένα αρχείο με όνομα π.χ. `reserr.dat`, με το πρόγραμμα `gnuplot` ως εξής:

   ```
   $ gnuplot
   > set parametric
   > set logscale x
   > set logscale y
   > set title ``Ovoma kai arithmos mntrwou''
   > plot ``reserr.dat'' w l
   > set term post
   > set output ``errors.ps''
   > replot
   > quit
   ```

   Τυπώστε το αρχείο `errors.ps`. Μπορείτε να δείτε το αρχείο αυτό, προτού το τυπώσετε, με την εντολή `gv errors.ps`.

2. Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα $Ax = f$, όπου $f \in \mathbb{R}^n$, και A είναι ο ακόλουθος τριδιαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & b_i & a_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Μια μέθοδος για να επιλύσουμε το σύστημα αυτό είναι να αναλύσουμε τον A σε γινόμενο $A = LU$, όπου

$$L = \begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} & & & & & & \\ b_2 & \gamma_2^{-1} & & & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & b_i & \gamma_i^{-1} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & b_{n-1} & \gamma_{n-1}^{-1} & \\ & & & & & b_n & \gamma_n^{-1} \end{pmatrix} \text{ και } U = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 c_1 & & & & & \\ & 1 & \gamma_2 c_2 & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & \gamma_i c_i & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & & 1 & \gamma_{n-1} c_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Αρχικά, επαληθεύστε ότι τα γ_i υπολογίζονται από τον τύπο

$$\gamma_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \gamma_i = \frac{1}{a_i - b_i \gamma_{i-1} c_{i-1}}, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Τώρα, για να λύσουμε το σύστημα $Ax = f$, το γράφουμε ως $L \underbrace{Ux}_{y} = f$ και υπολογίζουμε καταρχήν το y λύνοντας το σύστημα $Ly = f$,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1 \gamma_1 \\ y_i &= \gamma_i (f_i - b_i y_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

και στη συνέχεια το x λύνοντας το σύστημα $Ux = y$,

$$\begin{aligned} x_n &= y_n \\ x_i &= y_i - x_{i+1} \gamma_i c_i, \quad i = n-1, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{3}$$

(Παρατηρήστε ότι στους τύπους (2) και (3) δεν εκτελούνται καθόλου διαιρέσεις.)

Υπολογίστε θεωρητικά πόσες περίπου πράξεις απαιτούνται για την επίλυση του τριδιαγωνίου συστήματος $Ax = f$ με τη μέθοδο αυτή. Γράψτε ένα πρόγραμμα (σε διπλή ακρίβεια) που να επιλύει το σύστημα $Ax = f$ (A διάστασης 40×40) με τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω. Τα διανύσματα a, b, c, και f δίνονται στο αρχείο `Vvect.dat`, που βρίσκεται στη σελίδα του μαθήματος. Στο αρχείο αυτό η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στο διάνυσμα a, η δεύτερη στο b, η τρίτη στο c, και η τέταρτη στο f.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Θα πρέπει να δουλέψετε στις ίδιες ομάδες όπως της Άσκησης 1.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 22–25/11 σε ώρα που θα ανακοινωθεί την επόμενη εβδομάδα.
- Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα πρέπει να έχετε μαζί σας τυπωμένα τα προγράμματά σας, το σχήμα, καθώς και τυπωμένες ή χειρόγραφες τις απαντήσεις στα θέματα 1α΄ και 2.