ΕΜ 191: Εισαγωγή στους Αριθμητικούς Αλγορίθμους (Ακαδ. έτος 2004–2005)

Τετάρτη 29 Ιουνίου 2005

Εργαστηριακή Άσκηση

1. Οι επόμενοι αριθμοί από την Αμερικανική Υπηρεσία Απογραφών δίνουν τον πληθυσμό των Ηνωμένων Πολιτειών

Έτος (t)	Πληθυσμός (y)
1900	75,994,575
1910	91,972,266
1920	105,710,620
1930	123,203,000
1940	131,669,275
1950	150,697,361
1960	179,323,175
1970	203,211,926

(α′) Επειδή μας δίνονται οκτώ σημεία, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο 7ου βαθμού που παρεμβάλλεται στα δεδομένα. Όμως μερικοί τρόποι παράστασης είναι υπολογιστικά καλύτεροι από άλλους. Να τέσσερεις δυνατότητες, καθεμία για $t \in [1900, 1970]$:

$$\sum_{i=1}^{8} a_i\, t^{8-i},$$
$$\sum_{i=1}^{8} b_i\, (t-1900)^{8-i},$$
$$\sum_{i=1}^{8} c_i\, (t-1935)^{8-i},$$
$$\sum_{i=1}^{8} d_i\, \left(\frac{t-1935}{35}\right)^{8-i}.$$

Σε κάθε περίπτωση οι συντελεστές προσδιορίζονται ως λύση ενός 8×8 γραμμικού συστήματος, αλλά οι πίνακες των διαφόρων συστημάτων είναι αρκετά διαφορετικοί. Σχηματίστε καθέναν από τους τέσσερεις πίνακες και εκτιμήστε το δείκτη κατάστασής του χρησιμοποιώντας την `DECOMP`. Μετά χρησιμοποιήστε την `SOLVE` για να προσδιορίσετε τους συντελεστές. Ελέγξτε κάθε μία από τις παραστάσεις για να δείτε πόσο καλά αναπαράγει τα αρχικά δεδομένα.

(β′) Χρησιμοποιώντας την παράσταση με την καλύτερη κατάσταση που βρήκατε στο ερώτημα α′, προσδιορίστε το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής p 7ου βαθμού, και στη συνέχεια υπολογίστε τις τιμές του με το σχήμα του Horner, παίρνοντας εκτιμήσεις για τον πληθυσμό από το 1900 έως το 1970, ανά δύο χρόνια (δηλ. στα ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος [1900,1970], $x_i = 1900 + (i-1)h$, $i = 1, 2, \ldots, 36$, με βήμα $h = 2$). Σώστε τα αποτελέσματά σας σε ένα αρχείο με όνομα `res1.dat` και και παραστήστε τα γραφικά.

(γ′) Χρησιμοποιήστε το υποπρόγραμμα `SPLINE` για να προσδιορίσετε τους συντελεστές της κυβικής spline που παρεμβάλλεται στα δεδομένα. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `SEVAL` για να πάρετε τιμές της spline στα ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος [1900,1970], $x_i =$

$1900 + (i-1)h$, $i = 1, 2, \ldots, 36$, με βήμα $h = 2$. Σώστε τα αποτελέσματά σας σε αρχείο με όνομα `res2.dat` και παραστήστε τα γραφικά.

(δ΄) Οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις θα πρέπει να παρουσιάζονται στο ίδιο σχήμα. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

Παρατηρήσεις: Οι γραφικές παραστάσεις που ζητούνται στα παραπάνω ερωτήματα μπορούν να γίνουν εύκολα με το πρόγραμμα `gnuplot` ως εξής: (Έστω ότι `inp.dat` είναι το αρχείο με τα δεδομένα του προβλήματος.)

```
$ gnuplot
> plot 'inp.dat' w p pt 3 ps 2
> replot 'res1.dat' w l lt 5
> replot 'res2.dat' w l lt 1
> set title 'Ovoma kai arithmos mntrwou'
> set term post
> set output 'graph.ps'
> replot
> quit
```

Τυπώστε το αρχείο `graph.ps`. Μπορείτε να δείτε το αρχείο αυτό, προτού το τυπώσετε, με την εντολή:

`gv graph.ps`.

2. Η συνάρτηση σφάλματος ορίζεται ως

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε έναν πίνακα τιμών για την $\operatorname{erf}(x)$, για $x = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.9, 2.0$. Για να το επιτύχετε αυτό γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran σε απλή ακρίβεια που να υπολογίζει αριθμητικά το παραπάνω ολοκλήρωμα (για τις διάφορες τιμές του x) με το σύνθετο τύπο του ορθογωνίου και ομοιόμορφο διαμερισμό. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να περιέχει μια συνάρτηση `RECT(A, B, N, F, R)`, που θα δέχεται ως είσοδο τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, το πλήθος n των υποδιαστημάτων του διαμερισμού καθώς και την προς ολοκλήρωση συνάρτηση f, και θα επιστρέφει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος R. Για κάθε x χρησιμοποιήστε n υποδιαστήματα, με $n = x/h$, όπου $h = 0.01$. (Δηλ. για $x = 0.1$ πάρτε $n = 10$ υποδιαστήματα, για $x = 0.2$ πάρτε $n = 20$, κ.ο.κ.) Συγκρίνετε τον πίνακά σας με τις τιμές που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\operatorname{erf}(x)$	0.00000000	0.11246292	0.22270259	0.32862676	0.42839236	0.52049988

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\operatorname{erf}(x)$	0.60385609	0.67780119	0.74210096	0.79690821	0.84270079

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$\operatorname{erf}(x)$	0.88020507	0.91031398	0.93400794	0.95228512	0.96610515

x	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\operatorname{erf}(x)$	0.97634838	0.98379046	0.98909050	0.99279043	0.99532227