Τμημα Εφαρμοσμενων Μαθηματικων — Ακαδ. έτος 2005–2006

ΕΜ 295: Θεωρια Προσεγγισεων και Υπολογισμοι — 14/4/2006

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

1. Αποδείξτε ότι η τομή δύο κυρτών υποσυνόλων ενός γραμμικού χώρου X είναι κυρτό σύνολο. Ισχύει το ίδιο και για την ένωση;

2. Αποδείξτε ότι η νόρμα $\|f\|_4 = \left[\int_a^b (f(x))^4\,dx\right]^{1/4}$, $f \in C[a,b]$ είναι αυστηρά κυρτή.

3. Θεωρήστε τον $\mathbb{R}^2$. Έστω $x_1 = (-1,0)$ και $x_2 = (1,0)$. Προσδιορίστε την τομή των σφαιρών που ορίζονται από τις σχέσεις $\|x - x_1\| = 1$ και $\|x - x_2\| = 1$, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι: α) η $\|\cdot\|_2$, β) η $\|\cdot\|_1$, και γ) η $\|\cdot\|_\infty$.

4. Στον $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ προσδιορίστε όλες τις βέλτιστες προσεγγίσεις του $x := (1,2,3)$ από τον $Y = \{(\alpha_1,\alpha_2,0) :\ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. Πώς εξηγείτε το γεγονός ότι υπάρχουν πολλές βέλτιστες προσεγγίσεις;

5. Έστω $f(x) := 1$ και $q_1(x) = x$. Προσδιορίστε τις βέλτιστες προσεγγίσεις της f από τον $Y := \operatorname{span}(q_1)$, ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ του $C[-1,1]$.

6. Δείξτε ότι αν μια ακολουθία $\{g_n\}$ είναι ορθοκανονική στο $[a,b]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)$, τότε η ακολουθία $\{\sqrt{w(x)}\, g_n(x)\}$ είναι ορθοκανονική ως προς τη μοναδιαία συνάρτηση βάρους.

7. Έστω $f \in C[0,1]$. Δείξτε ότι $\int_0^1 |f(x)|\,dx \leqq \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$.

8. Θεωρήστε ένα συμμετρικό διάστημα $[-a,a]$ και μια *άρτια* συνάρτηση βάρους $w(-x) = w(x)$. Αν $\{f_1, f_2, \ldots\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα από άρτιες συναρτήσεις και $\{g_1, g_2, \ldots\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα από περιττές συναρτήσεις, δείξτε ότι και το σύνολο $\{f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots\}$ είναι ορθοκανονικό.

9. Δείξτε ότι το σύνολο $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα στο $[0,\pi]$.

10. **Ασκήσεις: 5.3, 5.6, 5.7, 5.11, 5.12, 5.13, 5.16** από το βιβλίο Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση* (πέμπτη έκδοση), σελ. 205–208.

11. Αν $f \in C[0,1]$ και $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0\ \forall n = 0,1,2,\ldots$, δείξτε ότι $f \equiv 0$.
(*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Weierstrass για να δείξετε ότι $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0$.)

12. Αν $B_n(f)$ είναι το πολυώνυμο Bernstein για την f δείξτε ότι $|B_n(f)| \leqq B_n(|f|)$, και $B_n(f) \geqq 0$, όταν $f \geqq 0$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι $\|B_n(f)\|_\infty \leqq \|f\|_\infty$.

13. Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

14. Δείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev.
   (i) $T_m(x) \cdot T_n(x) = \frac{1}{2}\left(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right)$ για $m > n$.
   (ii) $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$.

15. Αν $p \in \mathbb{P}_n$, δείξτε ότι $|p(x)| \leqq \|p\|_\infty\, |T_n(x)|$, για $|x| > 1$. (T_n είναι το πολυώνυμο Chebyshev πρώτου είδους βαθμού n.)

16. Στο διάστημα [-1,1] τα πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους ορίζονται ως εξής

$$U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{\sin(\arccos x)}.$$

Αποδείξτε ότι ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο

$$\begin{cases} U_0(x) = 1 \\ U_1(x) = 2x \\ U_n(x) = 2\,x\,U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n \geqq 2, \end{cases}$$

καθώς και ότι το U_n είναι πολυώνυμο βαθμού n.

17. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους T_n και δευτέρου είδους U_n ικανοποιούν

   (i) $T_n(x) = U_n(x) - x\,U_{n-1}(x)$.

   (ii) $(1-x^2)\,U_{n-1}(x) = x\,T_n(x) - T_{n+1}(x)$.

18. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο με βάρος $w(x) = \sqrt{1-x^2}$, στο $[-1,1]$.