ΕΜ 295: ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ (Ακαδ. έτος 2005–2006)

20 Ιουλίου 2006

2η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Θεωρήστε έναν διαμερισμό $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του διαστήματος $[a, b] = [-5, 5]$ από $n = 4, 8, 16$ διαστήματα. Σχεδιάστε, για κάθε n, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του Lebesgue $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$ (βλ. σχέση (5.7) στις σημειώσεις),

   (α) στην περιπτώση που τα $n+1$ σημεία είναι ισαπέχοντα (ομοιόμορφος διαμερισμός),

   (β) στην περιπτώση που τα $n+1$ σημεία είναι τα σημεία του Chebyshev.

   Τι παρατηρείτε;

2. Θεωρήστε τη συνάρτηση του Runge $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-5, 5]$. Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange p_n, βαθμού $n = 4, 8, 16$,

   (α) για ένα διαμερισμό από $n+1$ ισαπέχοντα σημεία στο [-5,5], και

   (β) για ένα διαμερισμό από $n+1$ σημεία Chebyshev στο [-5,5].

   Σχεδιάστε γραφικές παραστάσεις για κάθε περίπτωση. (Σε κάθε γραφική παράσταση θα πρέπει να απεικονίζεται η f και το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής.) Εκτιμήστε για όλες τις περιπτώσεις το μέγιστο σφάλμα της παρεμβολής $\|f - p_n\|_\infty$, από την ποσότητα

   $$E_n := \max_{0 \le i \le 200} |f(t_i) - p_n(t_i)|,$$

   όπου $t_i := a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 200$, $h = (b-a)/N$, $N = 200$, $a = -5$, $b = 5$.

3. Υπολογίστε και σχεδιάστε την κυβική spline παρεμβολής και την κυβική spline παρεμβολής Hermite για τη συνάρτηση f του Ερωτήματος 2 και για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό από $n = 4, 8, 16$ διαστήματα. Εκτιμήστε και πάλι το μέγιστο σφάλμα μέσω της ποσότητας E_n του προηγούμενου ερωτήματος.

   (Αν επιλέξετε να χρησιμοποιήσετε το `matlab` συμβουλευτείτε τη συνάρτηση `interp1`.)

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Αν είχατε παραδώσει την πρώτη εργαστηριακή άσκηση σε ομάδα των δύο ατόμων το ίδιο θα πρέπει να κάνετε και τώρα. Η ομάδα σας θα πρέπει να είναι η ίδια με αυτή της πρώτης εργαστηριακής άσκησης.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει το Σεπτέμβριο σε ημερομηνία που θα ανακοινωθεί αργότερα.