

1. Σε ένα τυχαίο περίπατο, καταστάσεων  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , αν σε χρόνο  $n$  το σωματίο βρίσκεται στην κατάσταση  $i (i \in \{-1, 0, 1\})$  τότε, σε χρόνο  $n + 1$  είναι εξ ίσου πιθανό να βρίσκεται στην  $i - 1$  ή  $i + 1$  κατάσταση και αν αυτό βρίσκεται στην κατάσταση  $2$  ή  $-2$  τότε, σε χρόνο  $n + 1$  είναι εξ ίσου πιθανό να βρίσκεται στην κατάσταση  $-1, 0$  ή  $1$ .

Να υπολογισθεί ο πίνακας των πιθανοτήτων μεταβάσεως  $1^{ns}$  τάξεως της εν λόγω αλυσίδας Markov και να υπολογισθούν οι εργοδικές πιθανότητες,  $\pi_{-2}, \pi_{-1}, \pi_0, \pi_1, \pi_2$ .

2. Θεωρούμε τις αλυσίδες Markov που περιγράφονται από τους στοχαστικούς πίνακες:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Να καθορίσετε τον χώρο καταστάσεων των παραπάνω αλυσίδων Markov και να τον χωρίσετε σε κλάσεις ισοδυναμίας. Να ελέγξετε αν οι αλυσίδες είναι ανάγωγες και να εξετασθεί η περιοδικότητα στις  $P_1, P_2$  και η εμφάνιση και μεταβατικότητα στην  $P_3$ .

3. Σε μια οποιαδήποτε αλυσίδα Markov  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ , να υπολογισθεί η πιθανότητα  $P[X_0 = i | X_n = j]$

Αν η  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  είναι αλυσίδα Markov με χ.κ  $E = \{0, 1\}$  και

$$P(X_n = 0 | X_{n-1} = 0) = q_0, P(X_n = 0 | X_{n-1} = 1) = q_1,$$

Καθορίστε τις πιθανότητες  $P(X_0 = 0 | X_n = 0)$  και  $P(X_0 = 1 | X_n = 1)$  ακριβώς και οριακά (του  $n \rightarrow +\infty$ ).

4. Κάποιος πηγαίνει στην δουλειά του ή με το αυτοκίνητο ή με το τρένο. Υποθέτουμε ότι ποτέ δεν παίρνει το τρένο δύο μέρες συνέχεια, αλλά αν πάει στην δουλειά του με το αυτοκίνητο, τότε την επόμενη ημέρα του είναι εξ ίσου αρεστό να πάρει το τραίνο ή το αυτοκίνητο. Υπολογίστε:

α) την πιθανότητα να πάει στην δουλειά του με το αυτοκίνητο μετά δύο ημέρες

β) την πιθανότητα να πάει στην δουλειά του με το αυτοκίνητο μετά δύο ημέρες εάν την πρώτη ημέρα εργασίας ρίχνει ένα συμμετρικό ζάρι και πηγαίνει με το αυτοκίνητο του αν εμφανισθεί 2.

**Σημείωση:** Οι Ασκήσεις 1, 3 και 4 εμπίπτουν στην ύλη της προόδου.