Στοχαστικές Ανελίξεις **Ασκήσεις VI**

Αλυσίδες Markov 13 – 20/12/2019

1. Έστω $\{X_\nu;\ \nu\epsilon\mathbb{N}_0\}$ αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $E=\{0,1,2,3,4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μεταβάσεως

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

i) Δώσετε την κατάλληλη διαμέριση του χώρου καταστάσεων.

ii) Βρείτε τις οριακές πιθανότητες: $\lim_{\nu\to+\infty} p_{ij}^{(\nu)}$, $i,j\epsilon E$.

iii) Βρείτε το μέσο χρόνο επανόδου για τις θετικές έμμονες καταστάσεις.

iv) Υπάρχει στάσιμη κατανομή;

2. Έστω $\{X_\nu;\ \nu\epsilon\mathbb{N}_0\}$ ο τυχαίος περίπατος με χώρο καταστάσεων $E=\mathbb{N}_0$ και πιθανότητες μεταβάσεως 1ης τάξεως τις:

$p_{00}=r_0,\ p_{01}=p_0,\ r_0+p_0=1$ (δηλ. το 0 είναι ανακλαστικό φράγμα) και

$p_{ii}=r_i,\ p_{i,i-1}=q_i\ ,\ p_{i,i+1}=p_i,\ r_i+p_i+q_i=1\ ,\ i=1,2,\ldots$

i) Αποδείξετε ότι η εν λόγω αλυσίδα Markov έχει μοναδική στάσιμη κατανομή.

ii) Υπολογίσετε την στάσιμη κατανομή της.

iii) Πως διαμορφώνεται η στάσιμη κατανομή όταν

α) $r_0=r,\ p_0=p,\ p_i=p,\ q_i=q,\ r_i=1-p-q,\ i=1,2,\ldots$

β) $r_0=0,\ p_0=1,\ p_i=p,\ q_i=q,\ r_i=1-p_i-q_i=0,\ i=1,2,\ldots$

3. Έστω $\{X_\nu;\ \nu\epsilon\mathbb{N}_0\}$ μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $E=\mathbb{N}_0$ και πιθανότητες μεταβάσεως 1ης τάξεως τις:

$$p_{i,i+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{i+2}\right)(=p_i),\ i=0,1,2,\ldots\ ,\ p_{i,i-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{i+2}\right)(=q_i),\ i=1,2,\ldots$$

και

$$p_{00}=1-p_{01}=\frac{3}{4}$$

Να προσδιοριστεί η στάσιμη κατανομή αφού εξασφαλίσετε πρώτα την ύπαρξη της.

4. Έστω $\{X(t);t\geq 0\}$και $\{Y(t);t\geq 0\}$ δύο ανεξάρτητες ανελίξεις Poisson με εντάσεις λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

i) η πρώτη εμφάνιση της $X(t)$ να γίνει πριν από την πρώτη εμφάνιση της $Y(t)$ και

ii) να γίνουν πρώτα δύο εμφανίσεις της $X(t)$ πριν την πρώτη εμφάνιση της $Y(t)$.

5. Σε ένα βενζινάδικο φθάνουν κατά μέσο όρο 20 πελάτες ανά ώρα. Έστω ότι οι εν λόγω αφίξεις ακολουθούν την ανέλιξη Poisson.

i) Ποία η πιθανότητα σε 15min να φθάσει ένας μόνο πελάτης;

ii) Ποία η πιθανότητα, μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων, να περάσουν

α) τουλάχιστο 3min; β) από 2 μέχρι 4min;

Αν η ποσότητα βενζίνης (σε λίτρα) που βάζει ένας πελάτης ακολουθεί την κανονική- $\mathcal{N}(20,16)$ κατανομή και ο σταθμός κερδίζει 2 λεπτά το λίτρο, ποίο το αναμενόμενο κέρδος σε διάστημα 12h;

6. Επιβάτες φθάνουν σε μία στάση λεωφορείου σύμφωνα με την ανέλιξη Poisson $\{X(t);t\geq 0\}$ εντάσεως $\lambda=2$ ανά μονάδα χρόνου.

Έστω ότι το λεωφορείο αναχώρησε την χρονική στιγμή $t=0$ και δεν άφησε κανέναν επισκέπτη στη στάση. Αν T είναι ο χρόνος άφιξης του επόμενου λεωφορείου, τότε ο αριθμός των επιβατών που περιμένουν στη στάση όταν φθάσει είναι $X(T)$. Ας υποθέσουμε ότι οι $\{X(t);t\geq 0\}$ και T είναι ανεξάρτητες και $T\sim\mathcal{U}(1,2)$. Υπολογίσετε:

i) $E[X(T)|T=t]$ και $E[X^2(T)|T=t]$ **ii)** $E[X(T)]$, $V[X(T)]$