

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Κατατακτήριες Εξετάσεις 2017

Ερώτημα 1: Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 4}(\mathbb{R}),$$

και το διάνυσμα $\mathbf{b} = (1, 1, c)^t \in \mathbb{R}^3$.

- Υπολογίστε για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$ το σύστημα $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση και για αυτές τις τιμές του c βρείτε όλες τις λύσεις.
- Βρείτε μία βάση του χώρου στηλών, $\mathcal{R}(A)$, του πίνακα A .

Ερώτημα 2:

- Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$ είναι βάση του \mathbb{R}^3 .
- Δίνεται η γραμμική απεικόνιση με $L(1, -1, 1) = (2, -1, 1)$, $L(-1, 2, 1) = (2, 2, 4)$, $L(0, 1, 1) = (1, 4, 5)$. Υπολογίστε την τιμή $L(x, y, z)$ (δηλαδή βρείτε τον τύπο της L).
- Βρείτε μία βάση του πυρήνα, $\ker(L)$, της L και μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του, $\ker(L)^\perp$ (εντός του \mathbb{R}^3).

Ερώτημα 3: Δίνεται το γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{v_1 + 2v_2 + 2v_3, -v_1 - 2v_2 + 3v_3, v_1 + 2v_2 - v_3\}$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένο και βρείτε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης.

Ερώτημα 4: Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και μία βάση για κάθε ιδιόχωρο του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$