Καταταχτήριες Εξετάσεις στη Γραμμική Άλγεβρα I, Δεκέμβριος 2017

---

1. Δίνεται ένας διανυσματικός χώρος V και διανύσματα x_1, x_2 του V. Θεωρούμε τις εξής ιδιότητες I και II (που ίσως έχουν αυτά τα διανύσματα):
Ιδιότητα I: τα x_1, x_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά δεν παράγουν τον V.
Ιδιότητα II: τα x_1, x_2, x είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για κάποιο $x \in V$.

A. Ισχύει ότι η ιδιότητα I συνεπάγεται την ιδιότητα II; Αν ναι, αποδείξτε το, αλλοιώς δώστε αντιπαράδειγμα.

B. Ισχύει ότι η ιδιότητα II συνεπάγεται την ιδιότητα I; Αν ναι, αποδείξτε το, αλλοιώς δώστε αντιπαράδειγμα.

---

2. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος V όλων των πολυωνύμων της μορφής $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$, όπου τα $a_0, a_1, a_2, \ldots$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Δίνονται και τα διανύσματα $x_0, x_1, x_2, \ldots$ του V με $x_n(t) = t^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) και $x_0(t) = 1$. Έστω $V_1 =< x_0, x_1, x_2 >$, $V_2 =< x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 >$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $L_1 : V_1 \to V_2$ και $L_2 : V_1 \to V_2$ με $L_1(x) = y$ όπου $y(t) = (x(t))^2$ και $L_2(x) = z$ όπου $z(t) = (3t+5)x(t^2)$

A. Είναι η L_1 γραμμική; Αν ναι, να βρείτε τον πίνακα της L_1 από την διατεταγμένη βάση (x_0, x_1, x_2) στην διατεταγμένη βάση $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

B. Είναι η L_2 γραμμική; Αν ναι, να βρείτε τον πίνακα της L_2 από την διατεταγμένη βάση (x_0, x_1, x_2) στην διατεταγμένη βάση $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

---

3. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός s. Δίνεται επίσης ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ s & -1 & 6 \end{bmatrix}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμές το $\lambda_1 = 3$ αλγεβρικής πολλαπλότητας $\alpha_1 = 2$ και το $\lambda_2 \neq \lambda_1$ αλγεβρικής πολλαπλότητας $\alpha_2 = 1$. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του s. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

---

4. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος V όλων των γραμμικών πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Δίνεται και το εξής εσωτερικό γινόμενο στον V:

$$< x, y >= x(-1)y(-1) + x(1)y(1)$$

Βρείτε τα ορθοκανονικά διανύσματα x_1, x_2 του V που προκύπτουν αν εφαρμόσουμε τον Αλγόριθμο Gram-Schmidt στην συνήθη βάση y_1, y_2 του V.

(Δηλαδή $y_1(t) = 1$ και $y_2(t) = t$ και το τυχαίο $x \in V$ είναι το $x(t) = a + bt$.)
