

M1111 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Σκοπός του μαθήματος είναι η εξοικείωση με τις έννοιες και τις τεχνικές του Απειροστικού Λογισμού μιάς μεταβλητής. Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται γνωστοί. Οι αυστηροί ορισμοί των ορίων αναφέρονται, αλλά χωρίς ιδιαίτερη έμφαση. Έμφαση δίνεται κυρίως στη διαισθητική κατανόηση των εννοιών και θεωρημάτων και στην εξάσκηση στην εφαρμογή τους, καθώς και στη μαθηματική μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων από τη Φυσική και άλλες επιστήμες.

Υλη

1. Ακολουθίες: Διαισθητική περιγραφή της έννοιας του ορίου. Σύντομη αναφορά στον ακριβή ορισμό. Ιδιότητες των ορίων (με αποδείξεις για μερικές από αυτές). Παραδείγματα (Μερικές αποδείξεις δεν θα είναι πλήρεις. Π.χ. η αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbf{R}$ θα θεωρηθεί δεδομένη). Αναφορά (με διαισθητική εξήγηση) στη σύγκλιση μονοτόνων και φραγμένων ακολουθιών. Ακολουθίες οριζόμενες με αναδρομικό τύπο.

2. Συναρτήσεις: Η έννοια της συνάρτησης. Γραφική παράσταση. Παραδείγματα: αλγεβρικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές, αντίστροφες τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, υπερβολικές και οι αντίστροφές τους. (Οι εκθετικές συναρτήσεις δεν ορίζονται με πλήρη αυστηρότητα).

3. Ορια συναρτήσεων: Διαισθητική περιγραφή της έννοιας του ορίου. Σύντομη αναφορά στον αυστηρό ορισμό. Ιδιότητες (με μερικές αποδείξεις).

4. Συνέχεια: Ορισμός. Ιδιότητες. Συνέχεια των γνωστών συναρτήσεων (ορισμένες αποδείξεις δεν θα είναι πλήρεις). Ασυνέχειες. Τα βασικά Θεωρήματα (όπου δεν είναι δυνατή η ακριβής απόδειξη, δίνεται διαισθητική-γεωμετρική εξήγηση).

5. Παραγωγή: Η έννοια της παραγώγου. Ταχύτητα, εφαπτομένη. Κανόνες παραγώγισης. Παράγωγοι των γνωστών συναρτήσεων. Θεώρημα Rolle, μέσης τιμής και οι συνέπειές τους (όπου δεν είναι δυνατή η ακριβής απόδειξη, δίνεται διαισθητική-γεωμετρική εξήγηση). Παράγωγοι ανώτερης τάξης. Ορισμός. Παραδείγματα.

6. Εφαρμογές της παραγώγισης: Εφαπτομένη και κάθετη καμπύλης. Γωνίες καμπυλών. Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις. Μέγιστα – ελάχιστα. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις, σημεία καμψής. Παραδείγματα. Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης. Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής (παραδείγματα κυρίως από τη Φυσική). Κανόνες του de l' Hôpital

7. Ορισμένο ολοκλήρωμα (κατά τμήματα) συνεχών συναρτήσεων: Ορισμός (με διαισθητική δικαιολογία της ύπαρξης. Γενικά, για φραγμένες συναρτήσεις μπορεί να δοθεί ο ορισμός με ακολουθίες αθροισμάτων Riemann, που αντιστοιχούν σε ισοδιαμερίσεις, ώστε να υπάρχει συμφωνία με τους ορισμούς των διπλών και τριπλών ολοκληρωμάτων του Απειρ. II). Ιδιότητες. Παραδείγματα υπολογισμού.

8. Αόριστο ολοκλήρωμα: Παράγουσα μιας συνάρτησης. Θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού (με αποδείξεις). Τεχνικές ολοκλήρωσης. Μέθοδος της αντικατάστασης. Ολοκλήρωση κατά μέρη. Ολοκλήρωση ρητών, αλγεβρικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

9. Εφαρμογές της ολοκλήρωσης - Γενικευμένα ολοκληρώματα: Υπολογισμοί εμβαδών. Υπολογισμοί όγκων (π.χ. για στερεά εκ περιστροφής). Εφαρμογές στη Φυσική (π.χ. υπολογισμός έργου). Γενικευμένα ολοκληρώματα. Ορισμοί. Παραδείγματα.

10. Δυναμοσειρές: Η έννοια της σειράς. Σύγκλιση σειράς. Παραδείγματα. Σύγκλιση δυναμοσειρών. Τύπος του Taylor, σειρές Taylor γνωστών συναρτήσεων.

11. Μέθοδοι Newton και Regula falsi για τον υπολογισμό ριζών εξισώσεων Αριθμητική ολοκλήρωση. Μέθοδος τραπεζίου και Simpson.