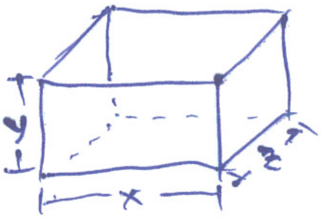
Ακρότατα υπό συνθήκες — Πολ/στές Lagrange

Π1: Έστω ανοιχτό κουτί που έχει σταθερό όγκο $V = 4m^3$.



Τί διαστάσεις πρέπει νά έχει γιά νά ελαχιστοποιηθεί τό υλικό κατασκευής?

Λύση Έχω ότι $xyz=4$ και θέλω νά ελαχιστοποιήσω το εμβαδόν $A=2xy+2yz+xz$. Έχω ότι $z=\frac{4}{xy}$ και

$$A(x,y) = 2xy + 2y\frac{4}{xy} + x\frac{4}{xy} = 2xy + \frac{8}{x} + \frac{4}{y}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A_x = 0 \\ A_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)=(2,1). \quad HA(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ με } d_1>0,\ d_2>0$$

Συνεπώς είναι ελάχιστο και τελικά οι διαστάσεις είναι:
$(x,y,z)=(2,1,2)$.

Όμως: Βρείτε τό ελάχιστο της $f(x,y,z) = x^2+2y^2+y^2z^4$ μέ τον περιορισμό $g(x,y,z) = e^{xy} + \cos\frac{x}{yz} + 4x^2yz^3 = 10$

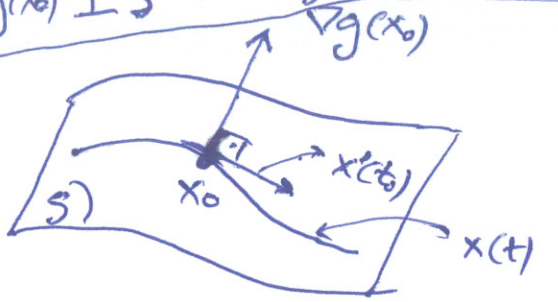
Δέν μπορώ νά "λύσω" τόν περιορισμό όπως στό Π1!

Θ1 (Πολλαπλασιαστές Lagrange) Έστω $f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. C^1 συναρτήσεις και $x_0\in U$ μέ $g(x_0)=c$. Έστω S τό σύνολο στάθμης $S=\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)=c\}$ και υποθέτουμε ότι $\nabla g(x_0)\neq 0$. Αν $f|S$ έχει τοπικό ακρότατο στό $x_0\in S$ τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(x_0) = \lambda\nabla g(x_0)$.

λ = πολ/στής Lagrange (μπορεί $=0$).

"Απόδ." Έστω $n=3$. $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

$\nabla g(x_0) \perp S \Rightarrow \nabla g(x_0) \perp x'(t_0)$



Έστω $S = \{x : g(x) = c\}$, $x_0 \in S$ και $\nabla g(x_0) \neq 0$. Επειδή $\nabla g(x_0) \neq 0$ η S σε μια γειτονιά του x_0 είναι επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (όπως στο σχήμα). [Αυτό θα το δούμε στη συνέχεια του μαθήματος]

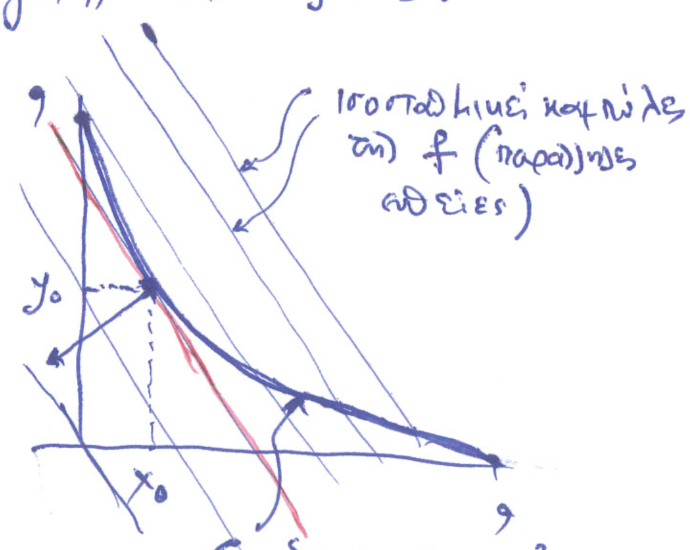
Έστω x_0 ακρότατο της $f|S$. Αν $x(t)$ τυχαία καμπύλη που περνάει από το x_0 και ανήκει στην S, τότε $\nabla g(x_0) \perp x'(t_0)$ [δεχόμαστε ότι $x(t_0) = x_0$].

Αν $F(t) = f(\bar{x}(t))$, τότε η F έχει ακρότατο στο t_0 άρα $F'(t)\big|_{t=t_0} = 0$ ή $\nabla f(x(t_0)) \cdot \bar{x}'(t_0) = 0 \Rightarrow \nabla f(x(t)) \perp x'(t)$ στο σημείο $t = t_0$ (όπου $x = x_0$)

Συνεπώς $\nabla g(x_0) \,//\, \nabla f(x_0) \Rightarrow \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Αντίστοιχη γεωμετρική εικόνα για $n = 2$ διαστάσεις:

Ποιο είναι το ελάχιστο της $f(x,y) = 2x + y$ υπό τον περιορισμό $g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$.



$S = \{(x,y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\}$

Στο σημείο ελαχίστου (x_0, y_0) η S εφάπτεται στην ισοσταθμική καμπύλη της f που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0).

Λύση: Πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \\ 1 = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{y}} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x} = \lambda/4 \\ \sqrt{y} = \lambda/2 \\ \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \\ \lambda = 4 \end{array}$$

άρα $(x_0, y_0) = (1, 4)$.

→ ΜΤ, σελ 186 Π1 – Π3

Επιστροφή στο Π. 11 (ΜΤ, σελ. 180):

Π: Βρείτε μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $f(x,y) = x^2+y^2-x-y+1$, στον δίσκο D <: $x^2+y^2 \le 1$.

<u>Λύση</u> Όταν $x^2+y^2<1$, βρήκαμε μοναδικό κρίσιμο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Έστω ότι $g(x,y) = x^2+y^2 = 1$. Τότε:

$$\begin{matrix} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x^2+y^2=1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} 2x-1 = \lambda 2x \\ 2y-1=\lambda 2y \\ x^2+y^2=1 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = \frac{1}{2(1-\lambda)} = y \\ \frac{1}{4(1-\lambda)^2} + \frac{1}{4(1-\lambda)^2} = 1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{2(1-\lambda)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\lambda} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ Αν $\frac{1}{1-\lambda} = +\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} = y$

αν $\frac{1}{1-\lambda} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = y$.

Οπότε έχω 2 πιθανά ακρότατα και υπολογίζω τις τιμές στα σημεία $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ και $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ κ.λ.π. ....

<u>Προσοχή</u>: Αυτή η μέθοδος <u>δεν</u> δουλεύει για την Άσκηση της σελ 6 της προηγούμενης εβδομάδας: Το D είναι τετράγωνο και το S <u>δεν</u> είναι ισοσταθμική καμπύλη κάποιας $g(x,y) = c$.

Η μέθοδος βρίσκει κρίσιμα σημεία στην S, για να δούμε αν είναι μέγιστα, ελάχιστα ή τίποτα υπάρχει κριτήριο 2ης παραγώγου, το οποίο δεν θα μας απασχολήσει.

Πολλαπλοί περιορισμοί

Βρείτε το max της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τους περιορισμούς

$$g_1(\bar{x}) = c_1$$
$$g_2(\bar{x}) = c_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$g_k(\bar{x}) = c_k$$

Τότε λύνω το σύστημα:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_k \nabla g_k$$
$$g_i(\bar{x}) = c_i$$

$(n+k) \times (n+k)$

(Βλ. SC, p.285.)

→ Βλ. ΜΤ, σελ. 189, παρ. 5.

Άσκηση 1 Τέμνω τον κώνο $z^2 = x^2 + y^2$ με το επίπεδο $z = x + y + 2$, οπότε βρίσκω την κωνική τομή C. Βρείτε τα σημεία του C που απέχουν την μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Λύση: Ελαχιστοποιώ την $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ με τους περιορισμούς:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$
$$g_2(x,y,z) = x + y - z = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 2y = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ z = -2\lambda_1 z - \lambda_2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x + y - z = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2 = 2x(1-\lambda_1) = 2y(1-\lambda_1)$$

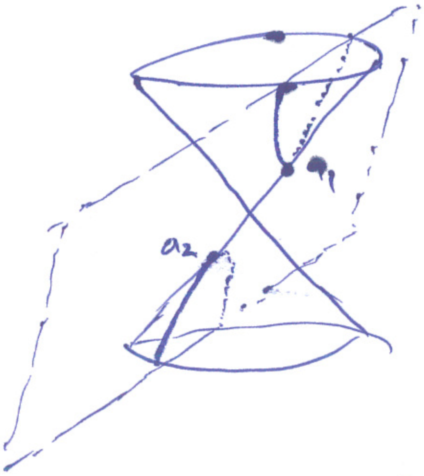
$$\Downarrow$$

$$2(x-y)(1-\lambda_1) = 0$$

$x = y$ ή $\lambda_1 = 1$

- $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \ldots (x,y,z) = (0,y,0)$ αδύνατον
- $x = y \Rightarrow \begin{array}{l} 2x^2 - z^2 = 0 \\ 2x - z = -2 \end{array} \Rightarrow 2x^2 - (2x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$

Οπότε έχουμε 2 κρίσιμα σημεία : $a_1 = (-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$ και $a_2 = (-2-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$ και $f(a_1) = 24-16\sqrt{2}$ και $f(a_2) = 24+16\sqrt{2}$. Το a_1 είναι σημείο ελαχίστου όμως το a_2 όχι μέγιστο.



(βλ. SC p. 286)

A2| Βρείτε το μέγιστο της $f(x,y,z) = xyz$, $x, y, z > 0$ όταν $g(x,y,z) = xy + yz + zx = A$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \left.\begin{array}{l} yz = \lambda(y+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xz = \lambda(x+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lr} (y-\lambda)(x-z) = 0 & (1) \\ (x-\lambda)(y-z) = 0 & (2) \\ xz = \lambda(x+z) & (3) \end{array}$$

(α) Έστω $y = \lambda$. Αν $x = \lambda$ τότε από (3) $\lambda z = \lambda^2 + \lambda z \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x = y = 0$, άτοπο.

(β) Έστω $x = z$, τότε και $y = z$ (αν $x = \lambda$, τότε όπως πριν καταλήγω σε άτοπο). Άρα $x = y = z$ και από $xy + yz + zx = A \Rightarrow x = \sqrt{\frac{A}{3}}$.

Είναι μέγιστο? Το $S = \{(x,y,z) : xy + yz + zx = A\}$ δεν είναι συμπαγές! Έστω ότι $x \to +\infty$, τότε υποχρεωτικά $y \to 0$ και $z \to 0$, (διότι $0 < x(y+z) < A$). Οπότε $z \cdot (xy + yz + zx) = Az \to 0$ άρα $f(x,y,z) + yz^2 + xz^2 \to 0 \Rightarrow f(x,y,z) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

Άρα αρκεί να περιοριστώ στο σύνολο $x \le M$ και παρόμοια $y, z \le M$ δηλ. στο $S' = S \cap \{\|\bar{x}\| \le M'\}$ που είναι συμπαγές!