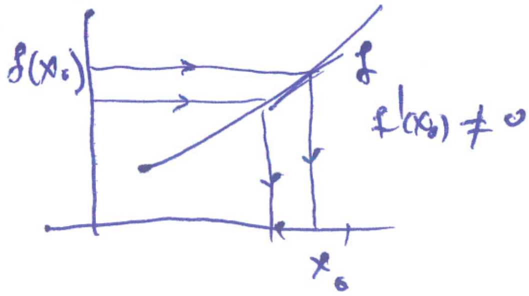
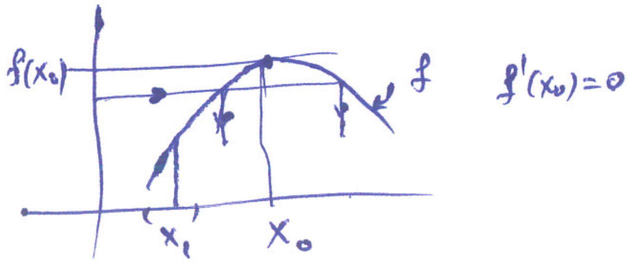
Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Απ I : Η $y=\ln x$ αντιστρέφεται ως $x=e^y$

$y=e^x$ ως $x=\sin^{-1}y$ κ.λπ. Για να μπορεί να αντιστραφεί μια συνάρτηση $f(x)$ τοπικά κοντά στο $x=x_0$, θα πρέπει $f'(x)\neq 0$ σε μια γειτονιά του x_0.
(π.χ. $f(x)=e^x+x^3+x^7$)



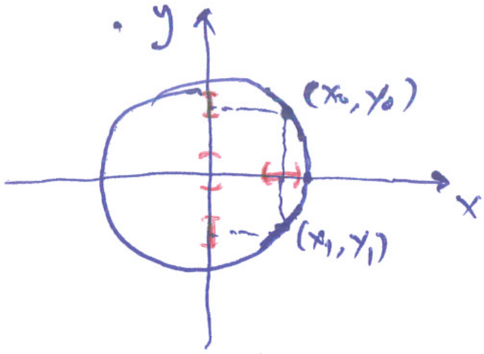


Αν f συνεχής και $f'(x_0)\neq 0$ τότε υπάρχει μια γειτονιά του x_0 όπου $f'(x)\neq 0$. Οπότε αν $f'(x_0)\neq 0$ τότε κοντά στο x_0 μπορώ να "λύσω" $x=f^{-1}(y)$.

Απ II (πολλές μεταβλητές). Έστω η $f(x,y,z)$ $(f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R})$ και γνωρίζω ότι $f(x,y,z)=0$. Μπορεί άραγε η σχέση να ορίσει μια συνάρτηση $z=g(x,y)$ τ.ώ. $f(x,y,g(x,y))=0$? Δηλ. να "λύσω" ως προς z? π.χ. αν $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ τότε $z=g(x,y)=x^2+y^2$, δηλ. μπορώ, πάντα!

Πχ : Έστω $f(x,y)=x^2+y^2=1$. Μπορώ να "λύσω" ως προς y δηλ. $y=g(x)$ τ.ώ. $x^2+g^2(x)=1$.

$y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Ας πάρω συγκεκριμένο (x_0,y_0).



π.χ. $(x_0, y_0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Τότε $y = \sqrt{1-x^2}$ κοντά στο $(x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2})$

Αν $(x_1, y_1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ τότε $y = -\sqrt{1-x^2}$ κοντά στο (x_1, y_1).

Αν όμως $(x_2, y_2) = (1, 0)$ τότε <u>δεν</u> υπάρχει ομαλή g συνάρτηση σε ανοιχτό που περιέχει το $(1,0)$ και να μπορώ να γράψω $y = g(x)$. Παρατηρούμε όμως ότι δεν υπάρχει πρόβλημα να γράψω $x = h(y) = \sqrt{1-y^2}$ δηλ. μπορώ να "λύσω" ως προς x σε γειτονιά του $(x_2, y_2) = (1, 0)$.

<u>Θ. πεπλεγμένων συναρτήσεων</u> → βλ. MT, σελ. 202, Θ11.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν δεχθούμε ότι η $z = g(x_1, \dots x_n)$ είναι παραγωγίσιμη τότε ο τύπος $\partial g/\partial x_i = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}$, $i = 1, \dots n$ είναι απλή συνέπεια του κανόνα της αλυσίδας:

Έστω $G(x_1, \dots x_n) = F(x_1, \dots x_n, g(x_1, \dots x_n)) = 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}.$$

<u>Παράδειγμα 1</u> Έστω $f(x,y) = x^2 + xy + e^y = 2$ (1)

Υπάρχει συνάρτηση $y = f(x)$ κοντά στο $(x,y) = (1,0)$ ώστε τα (x,y) να ικανοποιούν την (1)? Με άλλα λόγια μπορώ να λύσω την (1) ως προς y (<u>όχι απαραίτητα να βρω τύπο</u>)

(βλ. σημειώσεις Παπαδημητράκη, σελ. 82).

Ελέγχω στο $(1,0)$: $\frac{\partial F}{\partial y} = x + e^y \to \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \neq 0$

Άρα μπορώ! ότι $\exists\ y = g(x)$ για $x \in I$, $y \in J$ (κατάλληλα διαστήματα που περιέχουν το $1, 0$ αντίστοιχα) τ.ω.

$$x^2 + x\,g(x) + e^{g(x)} = 2.$$

Επιπλέον στο $(x\ y) = (1,0)$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{2x+y}{x+e^y}$

για $x \in I$, $y \in J$ και $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = \frac{2}{2} = 1$.

<u>Π2</u> $\quad F(x,y,z) = xy + z^2 + 3xz^5 = 4$, κοντά στο $(1,0,1)$.

(βλ. σημ. Παπαδημητράκη, σελ. 82 $\quad z = f(x,y)$ - - - -)

$\exists\ g$ τ.ω. $x = g(y,z)$? κοντά στο $(1,0,1)$?

Ελέγχω $\frac{\partial F}{\partial x} = y + 3z^5 \to \frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1) = 3 \neq 0$ Άρα <u>ναι!</u>

και $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}$ κ.λ.π. . .

<u>Γενικό Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων</u>

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots x_n; z_1, \dots z_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots x_n, z_1, \dots z_m) &= 0 \\ &\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots x_n, z_1, \dots z_m) &= 0 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}$$

<u>Θ|</u> Αν $\Delta \neq 0$ στο $(\bar{x}_0, \bar{z}_0)$ τότε κοντά στο $(\bar{x}_0, \bar{z}_0)$ υπάρχουν m ομαλές συναρτήσεις

$$z_i = k_i(x_1, \dots x_n), \quad i = 1, 2, \dots m.$$

Βλ. ΜΤ, σελ. 205, Π3.

Θ. αντίστροφης συνάρτησης

Έστω διανυσματική συνάρτηση $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F = (f_1, f_2, \dots f_n)$, $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots x_n)$ $i=1,\dots n$.

Μπορώ να βρω $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.

αν $F(\bar{x}) = \bar{y}$, τότε $\bar{x} = g(\bar{y})$? κοντά στο σημείο $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$

(Αν $n=1$, τότε $g(y) = f^{-1}(y)$).

$\Rightarrow$ Είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος:

$f_i(x_1, \dots x_n) = y_i$, $i=1,\dots n$ δηλ.

$$\begin{cases} F_1 = f_1(x_1, \dots x_n) - y_1 = 0 \\ F_2 = f_2(x_1, \dots x_n) - y_2 = 0 \\ \vdots \\ F_n = f_n(x_1 \dots x_n) - y_n = 0 \end{cases}$$

Θέλω να μπορώ να λύσω ως προς τα $x_1 \dots x_n$ (ως συναρτήσεις των $y_1 \dots y_n$), άρα η ορίζουσα Δ είναι η

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right). \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \end{vmatrix} (\neq 0)$$

ονομάζεται και Ιακωβιανή ορίζουσα $Jf(x_0)$

Θ Έστω $f_i: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i=1,\dots n$ C^1 συναρτήσεις. Αν $\Delta = Jf(x_0) \neq 0$ τότε υπάρχουν g_i C^1 συναρτήσεις τ.ω. $x_i = g_i(\bar{y})$, $i=1,\dots,n$. για $(\bar{x}, \bar{y})$ κοντά στο $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$.

Βλ. MT σελ. 207.