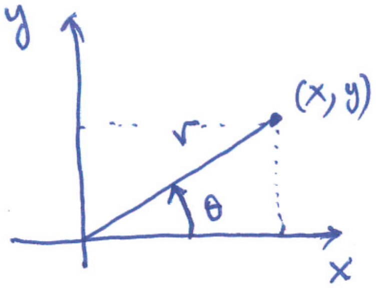
Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο ($\mathbb{R}^2$)



$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

π.χ. εξίσωση κύκλου: σε καρτεσιανές συντ. $x^2+y^2=1$. Σε πολικές: $\underline{r = 1}$

Έχω ότι $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ $\left(\tan\theta = \frac{y}{x}\right)$

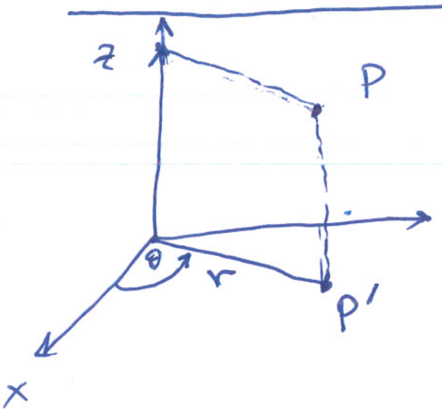
Π1 Τι καμπύλη παριστά η εξίσωση $r = 6\cos\theta$?

Απ. $r = 6\cos\theta \Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = 6x$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 3^2$

→ κύκλος με κέντρο $(3,0)$ και ακτίνα 3.

Κυλινδρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$ (ΜΤ σελ. 36, SC p. 65)



$P(x,y,z) = P(r,\theta,z)$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

π.χ. Έστω $(x,y,z) = (6,6,8)$ βρείτε (r,θ,z).

Απ: $z = 8$, $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

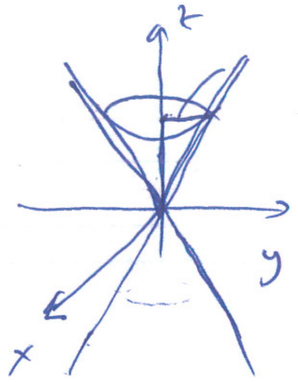
$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan 1 = \pi/4$.

Συνεπώς $(r,\theta,z) = (6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$.

→ Πολύ χρήσιμες, όταν το σχήμα μας έχει άξονα συμμετρίας.

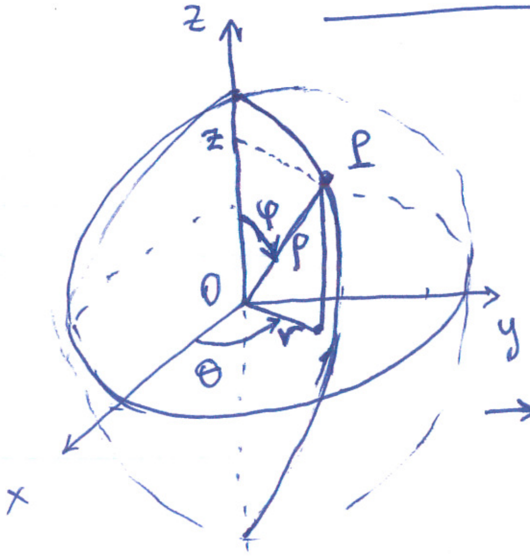
π.χ. $r = r_0$: εξίσωση απείρου κυλίνδρου με άξονα τον άξ. z και ακτίνα $= r_0$.

$z = 2r$: $\Rightarrow z^2 = 4r^2 = 4(x^2+y^2)$



: κώνος (κυκλικός). (SC, p. 66)

Σφαιρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$ (SC, p. 67)



$P\ (\rho, \varphi, \theta)$ $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

π.χ. $\rho = \rho_0$: σφαίρα κέντρου O, ακτίνας ρ_0.

→ Χρήσιμες όταν το σχήμα μας έχει κέντρο συμμετρίας.

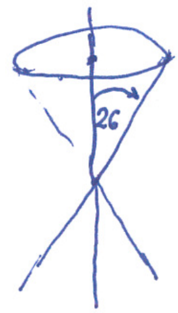
$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\varphi \qquad \Big\| \qquad r = \rho \sin\varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan\varphi = \sqrt{x^2+y^2}/z, \quad \tan\theta = y/x$$

Π: Σε κυλινδρικές συν. ο κώνος είναι $z = 2r$. Πώς γράφεται σε σφαιρικές?

Απ. $z = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\sin\varphi$, άρα: $z = 2r \Leftrightarrow \rho\cos\varphi = 2\rho\sin\varphi$

$\Leftrightarrow \tan\varphi = 1/2 \Leftrightarrow \varphi = \arctan\frac{1}{2} \simeq 26°$



Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

$\bar{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

m=1: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση n-μεταβλητών $f(x_1, x_2, \dots x_n)$.

m>1: $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διανυσματική συνάρτηση n-μεταβλητών:

$$\bar{f}(x_1, \dots x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots x_n) \\ f_2(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n) \end{pmatrix}$$

(βλ. ΜΤ σελ. 74, SC p. 84-85)

Εν γένει: $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, U = πεδίο ορισμού της f.

Αν $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, το γράφημα της f είναι τα σημεία $(x_1, \dots x_n, f(x_1, \dots x_n))$ και είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$!

(βλ. ΜΤ σελ. 75, SC p. 87).

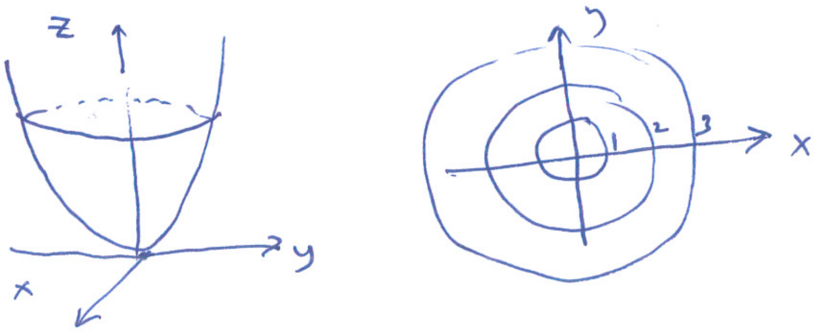
Σύνολο στάθμης (καμπύλες κ επιφάνειες)

Ορ.) Σύνολο στάθμης της $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με τιμή $c \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των σημείων $\bar{x} \in U$ τ.ω. $f(\bar{x}) = c$.
($n=2$, καμπύλη / $n=3$ επιφάνεια στάθμης).

Προσοχή: $\{$Σύνολο στάθμης$\} \subset U$ (πεδίο ορισμού)

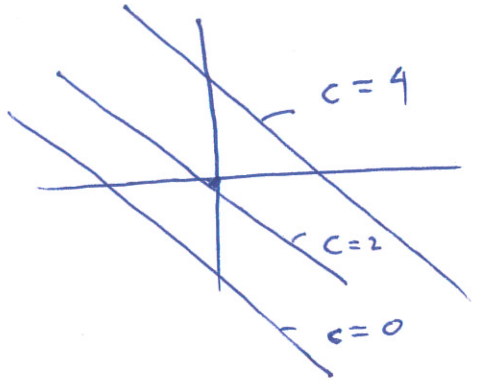
Π1 $f(x,y) = 2$. Καμπύλη στάθμης $= \begin{cases} \emptyset & \text{αν } c \neq 2 \\ \mathbb{R}^2 & \text{αν } c = 2. \end{cases}$

Π2 $f(x,y) = x^2 + y^2$ (παραβολοειδές)



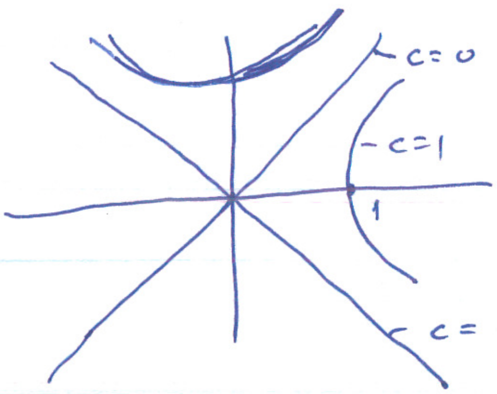
Π3 $f(x,y) = x+y+2$ (επίπεδο)

$x+y+2=c \Rightarrow x+y=c-2$ (εξ. ευθείας στό επίπεδο xy)



Π4 $f(x,y) = x^2-y^2$ (σάγμα ή σαμάρι).

Έστω $x^2-y^2=c$. Γιά $c=0 \Rightarrow x=\pm y$

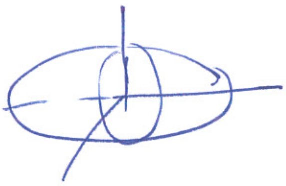


Γιά $c\neq 0$ π.χ. $c=1$

$x^2-y^2=1$: υπερβολή

(ΜΤ, σελ. 63

Επιφάνειες πού πρέπει νά αναγνωρίζουμε: (SC, p. 94)

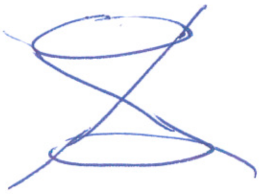


Ελλειψοειδές: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

ελλειπτικό παραβολοειδές: $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

σάγμα (ή υπερβολικό παραβολοειδές): $\frac{z}{c}=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$

κώνος $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



Π5 Βλ. ΜΤ σελ. 80 (παρ. 5).

Άσκηση 10 (MT, σελ. 85) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Έστω $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

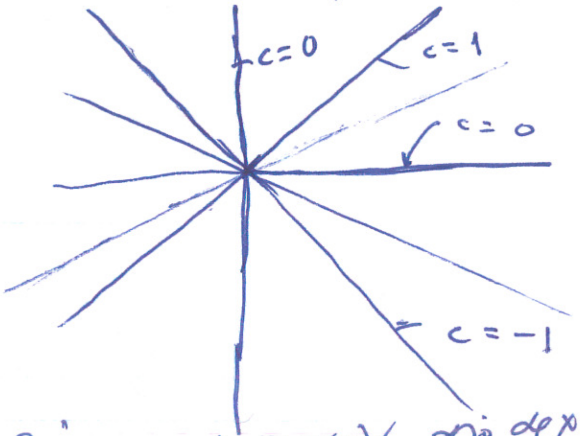
Τότε $g(r,\theta)=f(x,y)=\dfrac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=2\cos\theta\sin\theta=\sin2\theta$.

και $g(r,\theta)=c \iff \sin2\theta=c$.

Αν $|c|>1$ τότε σύνολο στάθμης $c=\emptyset$

Αν $|c|\leq1$ -//- -//- -//- $c=\{(r,\theta):\ \sin2\theta=c\}$

$=\{(r,\theta):\ \theta=\frac{1}{2}\arcsin c=$ σταθ.$\}$



δηλ. ευθείες που περνάν από αρχή αξόνων.

Άσκηση 8 (MT, σελ. 41): Επίπεδο $x=z$ σε α) κυλινδρικές β) σφαιρικές

Απ: (α) $x=r\cos\theta,\ z=z \Rightarrow \underline{z=r\cos\theta}$ $\quad r\geq0,\ 0\leq\theta<2\pi$.

(β) $x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ z=\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho\sin\varphi\cos\theta=\rho\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\sin\varphi\cos\theta$

Άσκηση (SC p. 69): Τι περιγράφει η εξίσωση $6x=x^2+y^2$ στον $\mathbb{R}^3$? Γράψτε την σε (α) κυλινδρικές συντεταγμένες (β) σφαιρικές.

Απ $x^2-6x+y^2=0 \iff (x-3)^2+y^2=3^2$ (κύλινδρος)

(α) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \Rightarrow 6r\cos\theta=r^2 \Rightarrow \underline{r=6\cos\theta}$

(β) $\left.\begin{array}{l}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\end{array}\right\} \Rightarrow 6\rho\sin\varphi\cos\theta=\rho^2\sin^2\varphi \Rightarrow \underline{6\cos\theta=\rho\sin\varphi}$