Ανοιχτή μπάλα (δίσκος) – Ανοιχτό σύνολο (MT, σελ. 86)

Ορ. Ανοιχτή μπάλα: Το $\{x\in\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\|x-x_0\|<r\} =: B(x_0,r)$

(κέντρο x_0, ακτίνα r). Λέγ. δίσκος αν $n=2$ (επίπεδο).

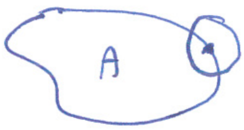
Είναι γενίκευση του ανοικτού διαστήματος $(x_0-r,\ x_0+r)$ στον $\mathbb{R}$.

Ορ. $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο: Αν $\forall x_0\in U$ $\exists$ $B(x_0,r)\subset U$.

Π.χ. Το $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$ είναι ανοικτό σύνολο

Ορ: Γειτονιά του σημείου x_0 = Ένα ανοικτό σύνολο U που περιέχει το x_0.

Ορ.: Συνοριακό σημείο του συνόλου $A\subset\mathbb{R}^n$ = Το $\bar{x}_0$ είναι συνοριακό σημείο αν κάθε $B(x_0,r)$ περιέχει σημεία του A και σημεία που δεν ανήκουν στο A



κλειστή μπάλα: $\{x : \|x-x_0\|\le r\} = \overline{B(x_0,r)}$

(η $\overline{B}$ περιέχει τα συνοριακά της σημεία, η B όχι). (SC p.101–102)

Όρια

Στον $\mathbb{R}$: Όταν το x πλησιάζει το x_0 η $f(x)$ πλησιάζει τον $b\in\mathbb{R}$

Το ίδιο και στις πολλές μεταβλητές!

Αυστηρός ορισμός: Έστω $\bar{f}: A\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ και $\bar{x}_0\in A$ ή x_0 συνοριακό σημείο. Τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\bar{f}(\bar{x})=\bar{b}$ αν και μόνον εάν

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ τ.ω. } 0<\|\bar{x}-\bar{x}_0\|<\delta \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{x})-\bar{b}\|<\varepsilon$$

Ευκλείδειο μήκος στον $\mathbb{R}^n$

Ευκλείδειο μήκος στον $\mathbb{R}^m$

Π1: $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{x} = \bar{x}_0$ (πάρε στον ορισμό $\varepsilon=\delta$).

Π2: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$. **Απόδ.**: Έστω $\varepsilon>0$. Θα δείξω ότι υπάρχει $\delta>0$ τ.ώ. όταν $0<((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{1/2}<\delta$ τότε $|x-x_0|<\varepsilon$. Όμως $|x-x_0| < (|x-x_0|^2+|y-y_0|^2)^{1/2}$, συνεπώς αν επιλέξω $\delta=\varepsilon$ είμαι οκ. (MT, σελ. 98)

Ιδιότητες ορίων: MT, σελ. 92, 93 (Θ2, Θ3, Π6)

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορ Έστω $f: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $x_0\in A$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αν είναι συνεχής $\forall x_0\in A$ τότε είναι συνεχής στο A.

π.χ. MT σελ. 95, Π7, 8, 9.

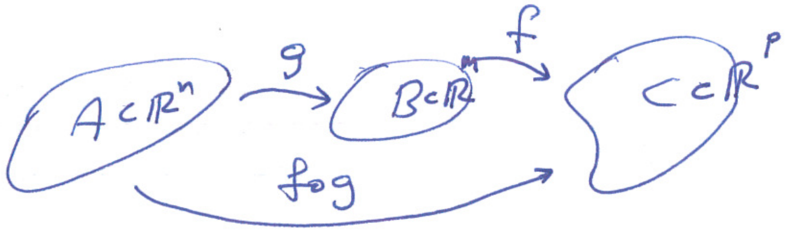
Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων: MT, σελ 96, Θ4, Π10.

Σύνθεση συναρτήσεων:

$g: A\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f: B\subset\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$f\circ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$



π.χ. $g(x,y) = z = \sin(x^3+y^3)$ $(\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$

$f(z) = e^z$ $(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$

$(f\circ g)(x,y) = e^{\sin(x^3+y^3)}$ $(\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$

Π2: $\bar{g}: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $\bar{g}(x,y,z) = (u,v) = (xyz,\ x^2+y^2)$,

$f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(u,v) = \frac{u}{v}$, $(f\circ g)(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2}$

Θ: Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής (ΜΤ. σελ. 93 Θ5)

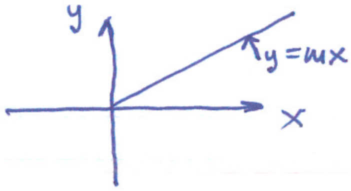
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΩΝ

Π1: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$ (Χρησιμοποιώ κατάλληλη ανισότητα)

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0 \text{ καθώς } (x,y)\to(0,0)$$

συνεπώς $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow 0$ —//—

Π2: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = ?$ (διαλέγω διαφορετικές κατευθύνσεις)



$$f(x, mx) = \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

Άρα, καθώς $(x,y)\to 0$ και $y = xm$ η τιμή της f εξαρτάται από το m!
Το όριο δεν υπάρχει.

Π3: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = ?$ (Χρησιμοποιώ σύνθεση και ΑΠ. Ι)

Έστω $z = x^2+y^2$. Καθώς $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow z\to 0$

και $\dfrac{\sin z}{z} \longrightarrow 1$.

Π4: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{3/2}+|y|^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$ (Χρησιμοποιώ πολικές συντ.)

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

οπότε
$$\frac{|x|^{3/2}+|y|^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^{3/2}\left(|\cos\theta|^{3/2}+|\sin\theta|^{3/2}\right)}{r} = r^{1/2}\left(|\cos\theta|^{3/2}+|\sin\theta|^{3/2}\right) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$$\left((x,y)\to 0 \Rightarrow r = (x^2+y^2)^{1/2} \to 0\right).$$

Π5: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = ?$ Θά τό βρούμε μέ 2 τρόπους:

α) Έχουμε ότι: $0 \leq \dfrac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \dfrac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{3/2}}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow 0$

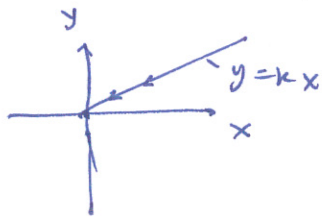
($|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ καί τό ίδιο γιά $|y|$, $|z|$).

β) Μέ χρήση σφαιρικών συντεταγμένων: $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$

Όποτε: $\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}{\rho^2} = \rho\cdot(\cdots) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$

Π6: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} = ?$ (ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ!!)

Ελέγχω κατά μήκος των ευθειών $y = kx$, $k\in\mathbb{R}$:



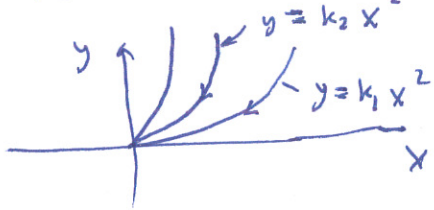
$f(x,kx) = \dfrac{x^2\cdot kx}{x^4+k^2x^2} = \dfrac{kx}{x^2+k^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Ελέγχω κατά μήκος του άξονα των y: Γιά $x=0$ έχω $f(0,y)=0$

Μπορώ νά συμπεράνω ότι τό όριο είναι $=0$?

ΟΧΙ: Ελέγχω κατά μήκος της παραβολής $y = kx^2$:

$f(x,kx^2) = \dfrac{x^2\,kx^2}{x^4+k^2x^4} = \dfrac{k}{1+k^2}$: εξαρτάται από το k!



$\Rightarrow$ Τό όριο **ΔΕΝ** υπάρχει!

Π7: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+3y+y^2+4}{x+y+1} = ?$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στό $(0,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \frac{4}{1} = 4.$$

Π8 (Δύσκολο παράδειγμα) Είναι η f συνεχής?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{5/3}|y|}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ελέγχω το σημείο $(0,0)$ (στα υπόλοιπα είναι συνεχής).

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$ Εισάγω νέα μεταβλητή $x = \eta^2$, οπότε

$$f(\eta^2, y) = \frac{|\eta|^{10/3}|y|}{\eta^4+y^4}$$

(Τώρα έχω ίδιες δυνάμεις στον παρονομαστή).

Στη συνέχεια βάζω πολικές $\eta = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$f = \frac{r^{10/3}|\cos\theta|^{10/3}\cdot r|\sin\theta|}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)} = r^{1/3}\frac{|\cos\theta|^{10/3}|\sin\theta|}{1-2\cos^2\theta\sin^2\theta} =$$

$$= r^{1/3}\frac{|\cos\theta|^{10/3}|\sin\theta|}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)}$$

. Παρατηρώ ότι έχω:

$$0 \leq f(r^2\cos^2\theta, r\sin\theta) \leq \frac{r^{1/3}}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)} \leq \frac{r^{1/3}}{1/2} \leq 2r^{1/3}$$

Συνεπώς καθώς $(x,y)\to 0 \Rightarrow r\to 0 \Rightarrow f(\cdot\cdot)\to 0$

Επομένως το όριο υπάρχει και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Δηλ. η f συνεχής!

Γενικά: Αν ένα όριο υπάρχει, για να το υπολογίσω χρησιμοποιώ κατάλληλες ανισότητες (Π1, Π5α, Π8) ή αλλαγή μεταβλητών (Π4, Π5β) ή σύνθεση συναρτήσεων και Απ. 1 (Π3) ή συνδυασμό των παραπάνω (Π8).

Για να αποδείξω ότι ένα όριο δεν υπάρχει δείχνω ότι κατά μήκος διαφορετικών κατευθύνσεων το όριο είναι διαφορετικό (Π2, Π6).