W4

Μερική παράγωγος

(ΜΤ, σελ. 104), SC p. 117

Ορ. $U\subset\mathbb{R}^n$, $f: U\to\mathbb{R}$: $f(x_1,\dots x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots x_j+h,\dots x_n)-f(x_1,\dots x_n)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h\bar{e}_j)-f(\bar{x})}{h}$$

$$\bar{e}_j = (0\dots,\overset{j\text{-θέση}}{1},\dots 0).$$

Αν $f=f(x,y)$ τότε $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (αντί για $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$).

→ βλ. ΜΤ, σελ. 104-105 Π1 – Π4.

⟹ Η μερική παράγωγος ως προς x_j είναι η συνήθης παράγωγος από Απ. 1, όπου κρατάω όλες τις άλλες μεταβλητές (πλην της x_j) σταθερές! Όμως:

Π1: $f(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=?$

Αν πάω από Απ. 1: $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^{1/3}y^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3}$ δεν ορίζεται για $x=0$!

Πάω με τον ορισμό: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h} = 0$!

$f(h,0)=0=f(0,0)$ Η σωστή απάντηση είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

Π2 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=?$

Όταν $(x,y)\neq(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\,(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} =$

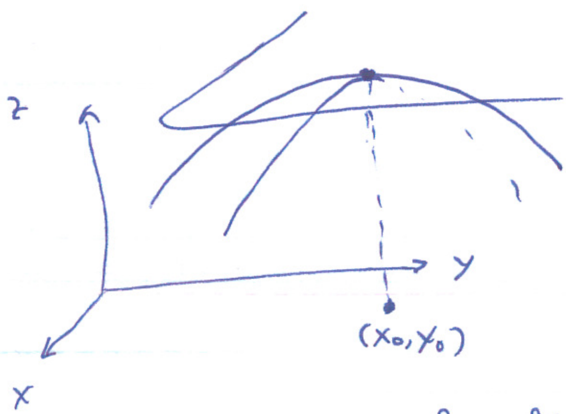
$$= \frac{6xy(x^2+y^2)-2x(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^4-6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ?$ Χρησιμοποιώ ορισμό:

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0}(-1) = -1.$$

Η ύπαρξη μερικών παραγώγων στο σημείο $\bar{x}_0$ δεν είναι αρκετή για να μιλήσουμε για παραγωγισιμότητα συνάρτησης στο $\bar{x}_0$. Γεωμετρικά θα θέλαμε το γράφημα της f στο σημείο $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$ να επιδέχεται εφαπτόμενο επίπεδο. (MT σελ. 106, SC p. 119)



Εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$(1) \quad z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Στον $\mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$

Εξίσωση εφαπτόμενης (στο $(x_0, f(x_0))$) ευθείας $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Ορισμός: Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) αν $\exists$ οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ στο (x_0,y_0) και:

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.$$

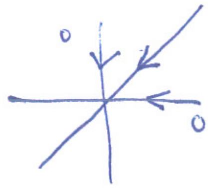
B). MT σελ. 108, Π5

Π3: $f(x,y) = ||x|-|y|| - |x| - |y|$ (SC p. 120)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

Εξετάζω το όριο $(*)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||x|-|y||-|x|-|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



γιά $x=0$ $f(0,y)=0$, γιά $x=y$ $f(x,x) = \frac{-2|x|}{\sqrt{2}\,|x|} = -\sqrt{2}$

Άρα τό όριο δέν υπάρχει.

$\Rightarrow$ η f δέν είναι παραγωγίσιμη στό $(0,0)$.

Π4 Βρείτε τό εφαπτόμενο επίπεδο στό γράφημα της $f(x,y)=x^2+y^2$, στό σημείο $(x_0,y_0)=(0,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=0 \;//\; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2$$

Άρα, αν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο, θά έχει την εξίσωση (1):

$$z = \overset{=1}{f(0,1)} + 0\cdot(x-0) + 2\cdot(y-1) \iff 2y - z = 1 \qquad (2)$$

Γιά νά αποδείξω ότι υπάρχει θά πρέπει νά ελέγξω τό όριο (*):

$$\frac{f(x,y)-f(0,1)-0(x-0)-2(y-1)}{\left(x^2+(y-1)^2\right)^{1/2}} = \frac{x^2+y^2-1-2y+2}{\left(x^2+(y-1)^2\right)^{1/2}} = \frac{x^2+(y-1)^2}{\left(x^2+(y-1)^2\right)^{1/2}}$$

$$= \left(x^2+(y-1)^2\right)^{1/2}. \text{ Συνεπώς } \lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(x^2+(y-1)^2\right)^{1/2} = 0$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο υπάρχει και δίνεται από την (2).

Επίσης λέμε ότι η παράγωγος της $f(x,y)$ στό σημείο (x_0,y_0) είναι ο πίνακας (γραμμή) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Έστω $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η παράγωγος $D\bar{f}(\bar{x}_0)$ της $\bar{f}=(f_1,\dots,f_m)$ στό $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$ είναι (εφόσον υπάρχει) ο πίνακας:

$$\{t_{ij}\} = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}, \quad T = D\bar{f}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{matrix}$$

Ορ. $\bar{f}: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η $\bar{f}$ είναι παραγωγίσιμη στό $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$ αν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στό $\bar{x}_0$ και

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \frac{\|\bar{f}(\bar{x})-\bar{f}(\bar{x}_0)-T(\bar{x}-\bar{x}_0)\|}{\|\bar{x}-\bar{x}_0\|} = 0$$

Ο πίνακας $m\times n$ $T=Df(\bar{x}_0)$ λέγεται παράγωγος της $\bar{f}$ στό $\bar{x}_0$ (MT, σελ. 109) β). ΜΤ, σελ 110 Π6, SC p. 126.

Έστω $f: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ βαθμωτή. Η Df είναι $1\times n$ πίνακας: το αντίστοιχο διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ λέγεται κλίση της f και συμβολίζεται με ∇f ή grad f. (ΜΤ, σελ. 110).

οπότε π.χ. $Df(x)\bar{h} = \nabla f(x)\cdot\bar{h}$

3 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ: (ΜΤ σελ 111-112)

Θ1 Αν $f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0\in\bar{U}$ τότε η f συνεχής στο x_0.

Θ2 $\bar{f}: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Αν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ υπάρχουν σε μιά γειτονιά του $\bar{x}_0$ και είναι συνεχείς τότε η $\bar{f}$ παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0$

Θ3 Η $\bar{f}=(f_1,\dots f_m): U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0\in U$ αν και μόνον εάν κάθε συνιστώσα $f_i: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0$.

[Αποδείξεις: SC p. 128]

Παραδείγματα: **Π5** Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση δηλ. $f(\bar{x})=A\bar{x}$ όπου A είναι $m\times n$ πίνακας. Ποιά είναι η παράγωγος της f?

$$\bar{f}=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_m\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

$Df=\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}=\{a_{ij}\}$ δηλ. $Df=A$. [Εύκολα βλέπουμε ότι οι f_i συνεχείς, είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}^n$].

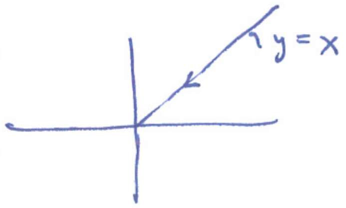
Π6 $f(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$? $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Για $x\neq0$, $y\neq0$: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3}$. Είναι η

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3}, & x\neq0, y\neq0\\ 0, & x=0, y=0\end{cases}$$

συνεχής? σε μιά γειτονιά του $(0,0)$? Για $y=x$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\frac{1}{3}x^{-1/3}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$

ΔΕΝ ικανοποιείται το Θ2!



(5)

Θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό (Το αντίστροφο του Θ2 δεν ισχύει)

Επειδή βρίσκω $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ελέγχω το όριο (⊛) σελ. (2):

$$\frac{f(x,y) - \overset{0}{f(0,0)} - 0\cdot(x-0) + 0\cdot(y-0)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x^{1/3}y^{1/3}}{(x^2+y^2)^{1/2}} . \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1/3}y^{1/3}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = ?$$

Για $x=y$ έχω: $\lim_{x\to 0} \frac{x^{2/3}}{\sqrt{2}|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} |x|^{-1/3} = +\infty$! (αντί για 0)

Άρα το όριο δεν υπάρχει $\Rightarrow$ η f όχι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Π7: $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + \sin(xy)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x^2+y^2} + y\cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{x^2+y^2} + x\cos(xy)$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η $\frac{\partial f}{\partial x}$ όσο και η $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς (ως πράξεις συνεχών) συναρτήσεις στο όλο το $\mathbb{R}^2$. Άρα η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$.